Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Bernd Hofmann
Fakultät für Mathematik Jan Blechschmidt

Übung Elementarmathematik im WS 2011/12

Klausurvorbereitung IV
Vektoren, Analytische Geometrie

Aufgabenkomplex 7 - Vektoren

1. (5 Punkte - WS 07/08) Gegeben sind die Vektoren $u = [1; -1; 2; 2]^\top, v = [2; 0; 4; 1]^\top$, $w = [1; 3; 2; -4]^\top \in \mathbb{R}^4$.
   a) Untersuchen Sie, ob die Vektoren u, v, w linear unabhängig sind.
   b) Welche Dimension hat der lineare Unterraum $U = span\{u, v, w\}$ aller Linearkombinationen von u, v, w?
   c) Wie groß ist die maximale Anzahl k von linear unabhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^4$? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. (3 Punkte - SS 08) Gegeben sind die von dem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängigen Vektoren
$$u = [1; \alpha; \alpha^2]^\top, \quad v = [\alpha; \alpha^2; -1]^\top \quad \in \mathbb{R}^3.$$
   a) Für welche α sind die Vektoren u, v linear unabhängig?
   b) Für welche α sind die Vektoren u, v orthogonal (bezüglich des Standard-Skalarprodukts in $\mathbb{R}^3$)?
3. (10 Punkte - SS 11) Im euklidischen Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ sind die Vektoren
$$a = [-1, 2, 3]^\top, \quad b = [1, -2, 2]^\top$$
gegeben.
   a) Berechnen Sie die orthogonale Projektion c von a auf b.
   b) Ermitteln Sie einen Vektor d, sodass
$$b, a - c, d$$
   in der angegebenen Reihenfolge ein linksorientiertes orthogonales Vektorsystem bilden
   c) Unter welcher Bedingung an die reelle Zahl α liegt der Vektor $u = [3, \alpha, -1]^\top$ in dem Untervektorraum U, der von a und b aufgespannt wird?
   Stellen Sie für diesen Fall u als Linearkombination von a und b dar.

Aufgabenkomplex 8 - Analytische Geometrie

1. (8 Punkte - WS 07/08) Ein schräges Dach ist Teil einer Ebene durch die Punkte $P(0; 0; 3)$, $Q(0; 6; 6)$, $R(-5; 6; 6)$. In $L(-4; -2; 12)$ befindet sich eine Punktlichtquelle.
   a) Bestimmen Sie den Punkt S des Daches, der von der Lampe am stärksten beleuchtet wird. (Je weiter ein Punkt von der Lichtquelle entfernt ist, umso schwächer wird er beleuchtet.)

b) Der Punkt $E(-2.5; 1.5; 5.5)$ ist das obere Ende einer Stange von vernachlässigbarer Dicke, die mit dem anderen Ende auf der Dachfläche befestigt ist und parallel zur z-Achse ausgerichtet ist.
Berechnen Sie den Schatten, den die Stange auf das Dach wirft.

2. (9 Punkte - WS 07/08) Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(0; 4; 0), B(1; 1; 0)$ und $C(4; 5; 0)$ in der x-y-Ebene.

   a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

   b) Geben Sie die Gleichung der Geraden g an, auf der die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AB}$ liegt. (Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite steht senkrecht auf dieser Seite und halbiert diese.)

   c) Die Mittelsenkrechten aller Dreiecksseiten schneiden sich im Mittelpunkt M des Umkreises des Dreiecks. Berechnen Sie M für das Dreieck $\triangle ABC$.

3. (9 Punkte - SS 08) Gegeben sind die Punkte $P_1(2; -2; 3)$ und $P_2(12; -6; 7)$ und die Ebene $E : -x + y - z = 2$.

   a) Untersuchen Sie, ob die Strecke $\overline{P_1P_2}$ die Ebene E schneidet.

   b) Berechnen Sie den Lotfußpunkt P_1' des Punktes P_1 in E.

   c) Die Punkte P_1, P_2 und $P_3(1; -2; 4)$ definieren eine Ebene ϵ. Bestimmen Sie die Hesse-Normalform der Ebenengleichung von ϵ.

   d) Ermitteln Sie die Schnittmenge der Ebenen E und ϵ.

4. (6 Punkte - SS 08) Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(6; -2; -3), B(3; 0; 3)$ und $C(4; 2; 1)$.

   a) Bestimmen Sie die Geradengleichung der Höhe h, die zur Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks $\triangle ABC$ gehört.

   b) Bestimmen Sie die Richtung der Winkelhalbierenden des Winkels zwischen den Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ des Dreiecks $\triangle ABC$.

5. (9 Punkte - WS 08/09) Gegeben sind die Geraden

$$g_1 : \quad x = [1, 0, 3]^\top + tr_1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad r_1 = [2, -1, -2]^\top$$

und

$$g_2 : \quad x = [-1, 1, 0]^\top + sr_2, \quad s \in \mathbb{R}, \quad r_2 = [4, 3, 1]^\top.$$

   a) Zeigen Sie, dass g_1 und g_2 windschiefe Geraden sind.

   b) Zu zwei windschiefen Geraden lassen sich parallele Ebenen E_1 und E_2 finden, sodass eine Gerade in E_1 liegt und die andere Gerade in E_2. Wie kann man den Normalenvektor der beiden Ebenen bestimmen?
   Wie lauten die (parameterfreien) Ebenengleichungen für E_1 und E_2 im Falle der gegebenen Geraden g_1 und g_2 ?

   c) Bestimmen Sie den Abstand zwischen g_1 und g_2.

   d) Berechnen Sie die orthogonale Projektion von r_2 auf r_1.

6. (7 Punkte - WS 09/10) Schreiben Sie die parameterfreie Gleichung einer Ebene E auf, die von den Richtungen

$$r_1 = [2, 3, -1]^\top \quad \text{und} \quad r_2 = [4, 1, -3]^\top$$

aufgespannt wird und die vom Ursprung $O(0; 0; 0)$ den Abstand $d = 3$ hat.
Welcher Punkt P in E hat von O den Abstand $d = 3$?
Ist die gesuchte Ebene eindeutig bestimmt? (Begründen Sie.)

7. (6 Punkte - WS 09/10) Ein Massepunkt bewegt sich für Zeiten $t \geq 0$ auf einer spiralförmigen Bahnkurve gemäß dem Gesetz $x(t) = 3\cos t, y(t) = \sin t, z(t) = t$.
Damit sind zur Zeit $t = \frac{\pi}{4}$ Geschwindigkeitsvektor v und Beschleunigungsvektor a wie folgt gegeben
$$v = [-\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1]^\top, \quad a = [-\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0]^\top.$$
Schreiben Sie den Vektor a als Summe zweier orthogonaler Vektoren, von denen einer Tangentialrichtung hat.
Berechnen Sie den Winkel zwischen a und seiner Tangentialkomponente.

8. (6 Punkte - SS 10) Gegeben sind die Geraden
$$\begin{aligned} g: \quad & x = [2, 4, 10]^\top + t[-1, 3, 5]^\top, \quad t \in \mathbb{R} \\ h: \quad & x = [-2, 2, -5]^\top + s[4, 2, 1]^\top, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
   a) Zeigen Sie, dass g und h windschief sind.
   b) Finden Sie eine Ebene E, die zu beiden Geraden den gleichen positiven Abstand hat.

9. (7 Punkte - SS 10) Die beiden Vektoren
$$a = [4, 4, 2]^\top, \quad b = [4, 1, -1]^\top \quad \in \mathbb{R}^3$$
spannen einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^3$ auf. Finden Sie eine Orthonormalbasis $B = \{u, v\}$ von U, wobei die Richtungen von u und a übereinstimmen sollen.
Ergänzen Sie die Basis B durch Hinzunahme eines weiteren Vektors zu einer Orthonormalbasis $\tilde{B}$ in $\mathbb{R}^3$.
Untersuchen Sie, ob $\tilde{B}$ rechtsorientiert oder linksorientiert ist.

10. (7 Punkte - SS 11) Im Punkt $A(3; 4; 4)$ des dreidimensionalen Raums befindet sich eine punktförmige Lichtquelle, die die Ebene $E : -2x + y - z = -8$ beleuchtet.
   a) Bestimmen Sie in E den Schattenpunkt S des Punktes $P(2; -1; 2)$.
   b) Unter welchem Winkel fällt das Licht im Punkt S ein?
   c) In welchem Punkt F der Ebene fällt das Licht unter einem Winkel von $90°$ ein?