Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Bernd Hofmann
Fakultät für Mathematik Jan Blechschmidt

Übung Elementarmathematik im WS 2011/12

Klausurvorbereitung III
Hauptachsentransformation, Analysisaufgaben

Aufgabenkomplex 5 - Hauptachsentransformation

1. (9 Punkte - WS 07/08) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung
$$9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 32x_1 + 4x_2 - 6 = 0.$$
Welche Kurve zweiter Ordnung wird hierdurch beschrieben?

2. (9 Punkte - SS 08) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung
$$x_1^2 + 16x_1x_2 - 11x_2^2 + 34x_1 - 28x_2 + 4 = 0.$$
Welche Kurve zweiter Ordnung wird hierdurch beschrieben?

3. (8 Punkte - WS 08/09) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung
$$x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 10x_1 - 70x_2 = 200.$$
Welche Kurve in der $x_1 - x_2 -$ Ebene wird hierdurch beschrieben?

4. (8 Punkte - WS 09/10) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung
$$x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - x_2 = 2.$$
Welche Kurve in der $x_1 - x_2 -$ Ebene wird hierdurch beschrieben?

5. (8 Punkte - SS 10) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung
$$x_1^2 - 16x_1x_2 - 11x_2^2 - 16x_1 - 22x_2 + 4 = 0.$$
Welche Kurve in der $x_1 - x_2 -$ Ebene wird hierdurch beschrieben?

6. (8 Punkte - SS 11) Bestimmen Die die Normalform der quadratischen Gleichung
$$3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 - 12 = 0.$$
Welche Kurve in der $x_1 - x_2 -$ Ebene wird hierdurch beschrieben?

Aufgabenkomplex 6 - Gemischte Analysisaufgaben

1. (5 Punkte - WS 08/09) Gegeben ist die Potenzreihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2}} x^k$.
   a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe und geben Sie den Konvergenzbereich an.
   b) Berechnen Sie unter Nutzung einer geeigneten geometrischen Reihe den Wert der Potenzreihe (innerhalb des Konvergenzbereichs).

2. (8 Punkte - WS 08/09) Durch
$$y = \ln x, \quad x > 0$$
ist eine ebene Kurve K gegeben.

a) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(x)$ von K.

b) Bestimmen Sie im Punkt $P_0(1;0)$ der Kurve den Krümmungsradius sowie die Gleichungen von Tangente und Normale.

c) Für welches x ist der Krümmungsradius minimal?

3. (4 Punkte - WS 08/09) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, ob die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x^{1/3}, & x \geq 0, \\ -|x|^{1/3}, & x < 0, \end{cases}$$
in $x = 0$ differenzierbar ist.

4. (3 Punkte - WS 09/10) Finden Sie das Taylor-Polynom dritten Grades für $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = \pi$.

5. (6 Punkte - WS 09/10) Ein Punkt bewegt sich für $t \geq 0$ nach folgendem Zeitgesetz in der $x - y -$ Ebene:
$$x(t) = t\cos t, \quad y(t) = t\sin t.$$

   a) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit des Punktes zu einer beliebigen Zeit $t > 0$.

   b) Bestimmen Sie im Punkt $P_0(0;\pi/2)$ der Bahnkurve die Gleichungen von Tangente und Normale.

6. (4 Punkte - WS 09/10) Gibt es eine reelle Konstante r, sodass die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cosh x - 1}{5x^2}, & x \neq 0, \\ r, & x = 0, \end{cases}$$
stetig auf $\mathbb{R}$ ist?

7. (8 Punkte - SS 10) Durch die Gleichung
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$
ist eine Ellipse K in der $x - y -$ Ebene gegeben.

   a) Geben Sie eine parametrische Darstellung $(x(t), y(t)), t \in I$ der Kurve K an.

   b) Bestimmen Sie im Punkt $P(-2; y_0)$ der Kurve ($y_0 > 0$) die Gleichungen von Tangente und Normale.

8. (8 Punkte - SS 10) Begründen Sie, warum die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0, \\ 1 + cx, & x > 0, \end{cases}$$
für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.
Untersuchen Sie den Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ bei $x = 0$ auf Konvergenz für $\Delta x \to 0$.
Für welches c ist f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

9. (9 Punkte - WS 10/11) Gegeben ist die Zykloide $\mathcal{K}$ mit der Parameterdarstellung
$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R},$$
wobei a eine positive Konstante ist.

a) Bestimmen Sie die Krümmung und den Mittelpunkt des Krümmungskreises für jenen Kurvenpunkt P, in dem die Tangente parallel zur x-Achse verläuft und den $0 \leq t \leq 2\pi$ gilt.

b) Finden Sie alle Punkte von $\mathcal{K}$, die nicht regulär sind.

10. (5 + 2 Punkte - WS 10/11) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^{k+1}} x^k$$

konvergiert bzw. divergiert.
Zusatzaufgabe: Gegen welche Funktion konvergiert die Potenzreihe?

11. (5 Punkte - WS 10/11) Wie lautet für die Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ das Taylor-Polynom zweiten Grades von

$$f(x) = x^x, \quad x > 0 \quad ?$$

12. (4 Punkte - SS 11) Für welche reelle Zahlen α, β, γ ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma, & x \leq 1 \\ -\ln x, & x > 1 \end{cases}$$

zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

13. (9 Punkte - SS 11) Bestimmen Sie Tangentengleichung und Krümmung im Punkt $P(1;0)$ der logarithmischen Spirale K mit der Parameterdarstellung

$$x(t) = e^{bt} \cos t, \quad y(t) = e^{bt} \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist $b \neq 0$ eine reelle Konstante.

14. (5 Punkte - SS 11) Wie lautet für die Funktion

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3$$

und die Entwicklungsstelle $x_0 = -1$ das Taylor-Polynom dritten Grades T_3 in Potenzen von $(x - x_0)$?
Welche Gestalt hat das Restglied R der Taylor-Entwicklung?