**Technische Universität Chemnitz** Prof. Dr. Bernd Hofmann
Fakultät für Mathematik Jan Blechschmidt

Übung Elementarmathematik im WS 2011/12

Klausurvorbereitung II
Komplexe Zahlen, Matrizen, Determinanten, Eigenwerte

## Aufgabenkomplex 1 - Komplexe Zahlen (Zusatzaufgaben)

Die folgenden Aufgaben waren nicht Bestandteil einer Prüfung Höhere Mathematik I für Maschinenbauer .
Die Lösungen werden nach der Besprechung des Aufgabenzettels bekannt gegeben.

1. Man bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

   a) $z^3 = -1$, b) $z^4 + 1 = 0$, c) $z^3 + 2 = 2i$, d) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$,
   e) $z^2 = -3 - 4i$, f) $z^4 - 2iz^2 + 2i = 1$, g) $z^2 + 4iz + 5 = 0$.

2. Man bestimme alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen:

   a) $z^5 = 1$, b) $z^3 - i = 0$, c) $z^6 = 64$, d) $\bar{z}^3 = -8$,
   e) $z^2 i - 2z - i + 1 = 0$, f) $(z - 3i)^3 + 64 = 0$, g) $\bar{z} = z^3$, h) $z^2 + 4iz = 5$.

## Aufgabe 4 - Matrizen, Determinanten, Eigenwerte

1. (5 Punkte - WS 07/08) Gegeben ist die Matrix

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & \beta & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Berechnen Sie die Determinante von $F$ in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\beta$.
   Ist $F$ invertierbar?
   Ist die transponierte Matrix $F^\top$ invertierbar?

2. (8 Punkte - WS 07/08) Die Matrix

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

   hat nur ganzzahlige Eigenwerte.
   Bestimmen Sie diese und die zugehörigen Eigenunterräume.
   Geben Sie für jeden Eigenunterraum eine Orthonormalbasis an.

3. (9 Punkte - SS 08) Gegeben ist die Matrix

$$F = \begin{bmatrix} \beta & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & \beta & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von $F$ in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\beta$.
Ermitteln Sie den Rang von $F$ in Abhängigkeit vom reellen Parameter $\beta$.

4. (9 Punkte - SS 08)

   a) Die symmetrische Matrix

   $$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   hat nur ganzzahlige Eigenwerte.
   Bestimmen Sie diese und die zugehörigen normierten Eigenvektoren.

   b) Nennen Sie zwei Eigenschaften von Eigenvektoren symmetrischer Matrizen.
   Überprüfen Sie diese Eigenschaften am Beispiel der Matrix $G$.

5. (10 Punkte - WS 08/09)

   a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der Matrix

   $$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -4 & 6 & -8 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

   und geben Sie zu jedem Eigenunterraum eine Basis an.

   b) Begründen Sie kurz folgenden Sachverhalt:
   Wenn $\lambda = 0$ Eigenwert einer Matrix $B$ ist, dann ist $B$ nicht invertierbar.

6. (9 Punkte - WS 09/10)

   a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der Matrix

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   in Abhängigkeit vom reellen Parameter $a \neq 0$ und geben Sie zu jedem Eigenunterraum eine Basis an.
   Wie lauten Eigenwerte und Eigenunterräume für $a = 0$ ?

   b) Zeigen Sie mit Hilfe der Eigenwertgleichung, dass folgende Behauptung wahr ist:
   Wenn eine Matrix $B$ den Eigenwert $\mu$ hat mit zugehörigem Eigenvektor $y$, dann ist $\mu^2$ Eigenwert der Matrix $B^2$ mit dem zugehörigen Eigenvektor $y$.

7. (8 Punkte - SS 10)
   Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert dessen algebraische und geometrische Vielfachheit sowie den zugehörigen Eigenunterraum.

8. (8 Punkte - SS 11)
   Ermitteln Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenunterräume der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Ist $A$ diagonalisierbar?