Technische Universität Chemnitz Prof. Martini
Fakultät für Mathematik Anna Trauth

Ergänzungskurs Elementarmathematik für Bachelor WS2011/2012

Klausurvorbereitung Teil II

Matrizen und Gleichungssysteme

1. An 100 Gewinner eines Gewinnspieles soll je ein Preis versandt werden. Dafür sollen die Preise A, B, C und D beschafft werden. Diese kosten 10 pro Preis A, 20 pro Preis B, 50 pro Preis C und 100 pro Preis D. An Versandkosten fallen pro Preis A und B jeweils 3, pro Preis C 6 und pro Preis D 9 an. Insgesamt stehen 2180 für den Einkauf der Preise und 360 für den Versand zur Verfügung, die unbedingt vollständig verbraucht werden sollen. Wieviele der einzelnen Preise müssen beschafft werden? Ermitteln Sie alle möglichen Lösungen! Wieviele verschiedene Lösungen gibt es?

2. Seien A, B, C, D, F und X reelle quadratische Matrizen gleicher Ordnung, X sei symmetrisch. Lösen Sie die Gleichung $F(XA + X + B + X^T + (CX)^T) = D$ nach X auf, wobei die dabei erforderlichen Invertierungen möglich sein sollen!

3. In einer Möbelfabrik werden aus Holz, Metall und Stoff Tische, Bänke und Stühle produziert, die einzeln bzw. als Sitzgruppe verkauft werden. Für einen Tisch werden 12 Einheiten Holz und 3 Einheiten Metall, für eine Bank 6 Einheiten Holz, 2 Einheiten Metall und 5 Einheiten Stoff, für einen Stuhl 2 Einheiten Holz, 1 Einheit Metall und 2 Einheiten Stoff benötigt. Eine Sitzgruppe A besteht aus einem Tisch und vier Stühlen, eine Sitzgruppe B aus einem Tisch, einer Bank und drei Stühlen.
a) Geben Sie die Verflechtungsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Einzelprodukten und für den Zusammenhang von Einzelprodukten und Sitzgruppen an und bestimmen Sie aus diesen mit Matrixmultiplikation die Verflechtungsmatrix für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Sitzgruppen!
b) Ein Kunde bestellt 40 Sitzgruppen A, 60 Sitzgruppen B und zusätzlich 10 Bänke. Ermitteln Sie unter der Verwendung der Verflechtungsmatrix aus a), welche Mengen der Ausgangsmaterialien benötigt werden!

   Für die Herstellung von y_1 Sitzgruppen A, y_2 Sitzgruppen B sowie zusätzlich x_1 Tischen, x_2 Bänken und x_3 Stühlen sollen 22 Einheiten Holz, 8 Einheiten Metall und 10 Einheiten Stoff vollständig verbraucht werden.
c) Stellen Sie ein mathematisches Modell auf!
d) Lösen Sie das Gleichungssystem für x_1, x_2, x_3, y_1 und y_2 mit dem Gaußalgorithmus zunächst ohne Rücksicht auf Ganzzahligkeits- und Nichtnegativitätsforderungen! Stellen Sie die Lösung dabei so dar, dass y_1 und y_2 frei gewählt werden können.
e) Nun soll gesichert werden, dass weder die Anzahl der herzustellenden Sitzgruppen noch die der zusätzlich herzustellenden Einzelprodukte negativ wird. Wie sind y_1 und y_2 in der Lösung von d) zu wählen, damit das gesichert wird?

4. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 13 \\ x_1 + 6x_3 + 5x_4 &= -4 \\ -x_1 - 8x_2 + 6x_3 - x_4 &= -24 \end{aligned}$$

Welchen Rang hat die Koeffizientenmatrix, wie hängt dieser mit der Zahl der freien Variablen (frei wählbaren Parameter in der allgemeinen Lösung) zusammen? Führen Sie für die ermittelte allgemeine Lösung auch die Probe aus!

5. Gegeben seien die Matrizen $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$ und $BB = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   - Bestimmen Sie die Determinante und den Rang der Matrix BA in Abhängigkeit vom Parameter a !
   - Für welche a existiert die Inverse zur Matrix BA? Berechnen Sie diese im Falle ihrer Existenz!
   - Lösen Sie im Falle $a = 3$ das Gleichungssystem $BA\vec{x} = (5 \;\; 6 \;\; 5)^{\mathsf{T}}$!
   - Berechnen Sie die Matrix AB^T und geben Sie ihren Rang in Abhängigkeit von a an!

6. Ein Bauteil hat eine viereckige Öffnung mit den Eckpunkten $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 3, 4)$, $C = (4, 1, 5)$, $D = (2, 0, 4)$, Koordinateneinheit sei dabei Meter. Die Öffnung werde von einer Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit $\vec{x} = (2 \;\; 0 \;\; 1)^{\mathsf{T}}$ durchflossen.

   a) Zeigen Sie, dass die Öffnung die Form eines Parallelogramms hat!
   b) Wieviel Liter der Flüssigkeit fließen in 10 Sekunden durch die Öffnung?

7. Wenden Sie den Gaußschen Algorithmus auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 5 \\ x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

Für welche Werte des Parameters λ ist das Gleichungssystem lösbar? Geben Sie im Falle der Lösbarkeit die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an!