Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Bernd Hofmann
Fakultät für Mathematik Jan Blechschmidt

Übung Elementarmathematik im WS 2011/12

Klausurvorbereitung I
Komplexe Zahlen, Ungleichungen, Lineare Gleichungssysteme

Aufgabenkomplex 1 - Komplexe Zahlen

1. (5 Punkte) Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen z der Gleichung
$$z^3 - a\left(1+\sqrt{3}i\right)^2 = 0.$$

2. (5 Punkte) Berechnen Sie jeweils Real- und Imaginärteil von allen komplexen Lösungen z der Gleichung
$$z^3 = (1+i)^6.$$

3. (6 Punkte) Lösen Sie mittels quadratischer Ergänzung folgende quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$:
$$z^2 + (3-i)z + 2 - 2i = 0.$$

4. (6 Punkte) Finden Sie jene Lösung w der Gleichung
$$z^2 - 4z = 2i - 4,$$
deren Imaginärteil negativ ist.
Geben Sie Real- und Imaginärteil von w^{2010} an.

5. (4 Punkte) Finden Sie den Real- und Imaginärteil von
$$w = \frac{z-1}{z+i}$$
für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

6. (4 Punkte) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl
$$z = \frac{1+2i}{2-i} - \frac{\alpha - 2i}{i+1}$$
in Abhängigkeit von der reellen Zahl α.
Für welches α ist z reell?

Aufgabenkomplex 2 - Ungleichungen

1. (4 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 5$ gilt die folgende Ungleichung?
$$\frac{x^2+6}{|5-x|} > 2$$

2. (5 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?
$$\left|\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right| > |x-2|$$

3. (5 Punkte) Es sei $a > 0$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?

$$|x+a| - |x-a| < x$$

4. (5 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?

$$3|x-2| - 4|x| \leq 5$$

5. (5 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ gilt die Ungleichung

$$\frac{4|x|-5}{|x-1|} \leq 2 \quad ?$$

6. (5 Punkte) Für welche reellen Zahlen x gilt die Ungleichung

$$x \cdot |x| > x \quad ?$$

Aufgabenkomplex 3 - Lineare Gleichungssysteme

1. (7 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 6 &= 0, \qquad & -3x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_4 + \alpha &= 0, \qquad & 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 6 &= 0. \end{aligned}$$

2. (5 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5, \qquad & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 1, \qquad & 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12. \end{aligned}$$

3. (5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R} (i = 0, 1, 2, 3)$ eines reellen Polynoms

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

aus folgenden vier Bedingungen, die zu einem linearen Gleichungssystem führen:

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = -1, \quad f(2) = 0, \quad f'(2) = 1.$$

Wieviele solcher Polynome gibt es?

4. (6 Punkte) Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem für $c \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit, und finden Sie gegebenenfalls alle Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3, \qquad & x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 13, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 6, \qquad & 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= c. \end{aligned}$$

5. (6 Punkte) Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem für $b \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit, und finden Sie gegebenenfalls alle Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -5, \\ 2x_1 + 2x_2 + bx_3 &= 4. \end{aligned}$$