

Übungsblatt 4 Reelle Funktionen 1

www-user.tu-chemnitz.de/~rhaf/lehre/ba/b1_11w.html

Winkelfunktionen

1. Verwenden Sie die Beziehungen

$$(i) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (ii) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (iii) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1,$$
$$(iv) \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad (v) \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad (vi) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

zum Nachweis der Richtigkeit folgender Formeln:

$$a) \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos \alpha, \quad b) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$c) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}, \quad d) \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$e) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$f) 2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta).$$

2. In der Raman-Spektroskopie tritt das Produkt $\cos(2\pi \nu_k t) \cos(2\pi \nu t)$ mit den Frequenzen ν_k und ν auf. Drücken Sie dieses Produkt als Summe aus.

3. Anwendungsaufgaben:

a) Der Schiefe Turm von Pisa hat die Neigung $\alpha = 4.45^\circ$ gegenüber dem Senklot. Die nördliche Seite s des Turms ist 55.39 m lang. Wie groß ist die Länge ℓ des Turmschattens, wenn die Sonne im Winkel $\beta = 60^\circ$ über der Erde im Süden steht?

b) Zur Berechnung der Breite $\overline{AB} = x$ eines Flusses werden auf der Plattform P eines Turms die Zenitwinkel $\varphi = 110^\circ$ und $\varepsilon = 125^\circ$ gemessen. Da die Höhe des Turms vom Fußpunkt F bis zur Spitze S mit $h = 42$ m, nicht aber seine bis zur Plattform P gemessene Höhe h' bekannt ist, misst man im Hilfspunkt C die Höhenwinkel $\alpha = 68^\circ$ und $\beta = 55^\circ$. Bestimmen Sie x .

- c) Eine Wolke wirft einen 150 m langen Schatten auf dem Erdboden. Der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen gegenüber der Horizontalen beträgt 30° . Wie groß ist der Sehwinkel α , unter dem man von B aus die Wolke sieht, wenn diese 500 m über dem Erdboden schwebt?

4. Berechnen Sie folgende Werte ohne Taschenrechner:

a) $\cos \frac{\pi}{3}$, b) $\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)$, c) $\sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)$, d) $\cos \frac{\pi}{4}$, e) $\sin \frac{5\pi}{4}$.

5. Geben Sie für folgende Ausdrücke die maximalen Teilmengen $D \subset \mathbb{R}$ an, für die sie definiert sind:

a) $f(x) = \tan x$, b) $g(x) = \arcsin x$, c) $h(x) = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}$.

Bestimmen Sie die Ableitungen $f'(x)$, $g'(x)$ und $h'(x)$.

6. Bestimmen Sie die n -ten Ableitungen der Funktionen $f(x) = \cos x$ und $g(x) = \sin x$. Beweisen Sie Ihre Vermutungen.