Elementarmathematik für ChemikerInnen

T. Oesterreich
WS 2011/12

# Übungsblatt 3
## Komplexe Zahlen

`www-user.tu-chemnitz.de/~haf/lehre/ba/b1_11w.html`

---

1. Lösen Sie die Gleichung $z^2 - (2+4\mathrm{i})z + 5 + \mathrm{i}\big(4 - 8\sqrt{3}\big) = 0$.

2. Lösen Sie die Gleichung $x^3 - 4x^2 + 8x = 8$ über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Führen Sie die Probe durch.

3. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen:

   a) $z^5 = 1$, b) $z^3 - \mathrm{i} = 0$, c) $z^6 = 64$, d) $\mathrm{i}\,z^2 - 2z - \mathrm{i} + 1 = 0$,
   e) $(z - 3\mathrm{i})^6 + 64 = 0$, f) $\overline{z} = z^3$, g) $z^2 + 4\mathrm{i}\,z = 5$, h) $\overline{z}^3 = -8$.

4. Drücken Sie $\cos(n\varphi)$ und $\sin(n\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, mittels Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus.

5. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der trigonometrischen Form dar:

   a) $z = \dfrac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}$, b) $z = \dfrac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-1}$, c) $z = (1+\mathrm{i})^2$.

6. Berechnen Sie mittels der Formel von Moivre:

   a) $(1+\mathrm{i})^{2011}$, b) $(1-\mathrm{i})^{2011}$, c) $(\mathrm{i}-1)^{2011}$, d) $\big(\sqrt{3}+\mathrm{i}\big)^3$.

7. Berechnen Sie folgende Wurzeln und stellen Sie sie graphisch dar:

   a) $\sqrt[4]{1}$, b) $\sqrt[6]{1}$, c) $\sqrt[6]{-\mathrm{i}}$, d) $\sqrt{2\big(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\big)}$, e) $\sqrt[5]{-\mathrm{i}}$,
   f) $\sqrt[4]{\mathrm{i}+3}$, g) $\sqrt[3]{27\,\mathrm{i}^6}$.

8. Berechnen Sie:

   a) $\dfrac{(3-4\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}} - \dfrac{(3+4\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}}$,

   b) $2^{-1000}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{i}} + \dfrac{1}{1+3\mathrm{i}} - \dfrac{3+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\right)^{2004}$,

   c) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{3-\mathrm{i}}{4+\mathrm{i}} + \dfrac{2+\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1} + \dfrac{2\mathrm{i}-3}{\mathrm{i}+1} - \dfrac{(27\mathrm{i}-6)(4+\mathrm{i})^{-1}}{4-\mathrm{i}}\right)^{2011}$.

9. Es sei $z = x + \mathrm{i}\,y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$, $r > 0$ beliebig reell. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen:

   $$\text{a) } \overline{z}, \quad \text{b) } \frac{1}{\overline{z}}, \quad \text{c) } z^2, \quad \text{d) } \mathrm{i}\,z, \quad \text{e) } z\,\overline{z}, \quad \text{f) } \left|\frac{z}{\overline{z}}\right|.$$

10. Skizzieren Sie in der Gaußschen Ebene die Menge aller komplexen Zahlen $z$ mit der Eigenschaft:

    $$\text{a) } z = \frac{1}{\overline{z}}, \quad \text{b) } \Re(z^2) = 1, \quad \text{c) } \Re\left(\frac{1}{z}\right) = c, \quad \text{d) } 2 < |z| < 4,$$

    $$\text{e) } |z - z_0| = |z - z_1|, \quad \text{f) } |z + 3| + |z - 3| \leq 10, \quad \text{g) } \left|\frac{1}{z}\right| \leq 3.$$

11. Zeigen Sie, dass für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ die Beziehung

    $$2\big(|z|^2 + |w|^2\big) = |z - w|^2 + |z + w|^2$$

    gilt.

12. Es sei $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, ein Polynom mit $p(z_0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $p(\overline{z_0}) = 0$ gilt.

13. Es sei $z = \dfrac{1}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $z^n$ reell?