Elementarmathematik für ChemikerInnen | T. Oesterreich, WS 2011/12

Übungsblatt 2

Beträge, Partialbruchzerlegung, Wurzeln, Potenzen, Logarithmen

`www-user.tu-chemnitz.de/~rhaf/lehre/ba/b1_11w.html`

Beträge

1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen $\mathcal{L}$ folgender Gleichungen bzw. Ungleichungen:

$$\text{a) } |x-2| \geq 10, \quad \text{b) } |x| > |x+1|, \quad \text{c) } |x+2| + |x-2| \leq 12,$$
$$\text{d) } |x+2| - |x| > 1, \quad \text{e) } |x-1|\,|x-2| = 2, \quad \text{f) } \big||x-1| + x\big| + |x| < 3.$$

2. Ermitteln Sie die Lösungsmengen $\mathcal{L}$ folgender Ungleichungen und stellen Sie $\mathcal{L}$ in einem x-y-Koordinatensystem graphisch dar:

$$\text{a) } |x| + |y| \leq 1, \quad \text{b) } |x+y| \leq 1, \quad \text{c) } 1 \leq |x-y| \leq 2,$$
$$\text{d) } |x-y|^2 + |x+y|^2 \leq 1, \quad \text{e) } \frac{|x-1|}{|y-1|} \leq 1, \quad \text{f) } 3 < |x+2| \leq 5.$$

Partialbruchzerlegung

Führen Sie die Partialbruchzerlegung aus:

$$\text{a) } \frac{2x+1}{(x+2)(x-5)}, \quad \text{b) } \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad \text{c) } \frac{x^{10}}{x^2+x-2},$$
$$\text{d) } \frac{1}{x^4-1}.$$

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$\text{a) } a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{2}{3}}, \quad \text{b) } a^{\frac{5}{3}} \div a^{\frac{2}{5}}, \quad \text{c) } (a^{-x})^{-2y}, \quad \text{d) } \left(\frac{b^{-5}x^2}{a^{-6}y^{-4}}\right) \cdot \left(\frac{a^4b^{-3}}{x^{-1}y^{-2}}\right),$$
$$\text{e) } \left[\left(\frac{1}{5^{-3}}\right)^{-2}\right]^{-3}, \quad \text{f) } \left[\left(\frac{x^{-3}y^{-2}}{z^{-3}}\right)^{4}\right]^{-2}, \quad \text{g) } \frac{x+y}{z} \cdot \sqrt[3]{\frac{z^4-z^3x}{x^2+2xy+y^2}},$$

h) $\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$, i) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, j) $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a^4-b^4}}\sqrt{a^2+b^2}$,

k) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4b}\sqrt[3]{a^2b^7}\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2b^5}}$, l) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a\sqrt[4]{a^3}}}$, m) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt{\sqrt[6]{x^2}}\cdot\sqrt[12]{x^7}$,

n) $\sqrt{\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}$.

2. Vereinfachen Sie die Logarithmenausdrücke bzw. bestimmen Sie x:

   a) $\log_k \sqrt[m]{k}$, b) $\log_y y^{-n}$, c) $\ln \mathrm{e}^{-3}$, d) $\log_x \frac{1}{u} = -1$,
   e) $\log_4 x = \frac{1}{2}$.

3. Fassen Sie mittels der Logarithmengesetze zusammen:

   a) $\log_a u - \log_a v + \log_a w$, b) $x \ln u + y \ln v$,
   c) $\frac{1}{3}\log_k a - \frac{1}{5}\log_k b + \frac{2}{3}\log_k c$.

Wurzel-, Exponential-, Logarithmengleichungen

1. Lösen Sie die biquadratischen Gleichungen:

   a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, b) $10x^4 - x^2 = 21$.

2. Lösen Sie folgende Gleichungen:

   a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$, b) $\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = 5$, c) $4\sqrt[3]{6x-1} = -5$,

   d) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}}$, e) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+3} = 0$,

   f) $\sqrt{5x-4} = 1 + \sqrt{3x+1}$, g) $\mathrm{e}^{x^2-2\sqrt{x^2}} - \mathrm{e}^{-1} = 0$,

   h) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$, i) $10^{2x} - 101\cdot 10^x + 100 = 0$,

   j) $\lg(x^2+10x-4) - \lg x - 1 = 0$, k) $\dfrac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)} = 3$.

3. Lösen Sie folgende Formeln nach der angegebenen Variablen auf:

   a) $Kq^n - \dfrac{q^n-1}{q-1} = 0$ (nach n), b) $Kq^n + (x-2)q^{-n} = c^2$ (nach q).

4. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen?

a) $\dfrac{\sqrt[n]{x^{2n-3}} \cdot \left(\sqrt[n]{x}\right)^{n+7}}{\sqrt[n]{x^4}} = x^3 \ (n \in \mathbb{N})$, b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$,

c) $\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a^4 - x^4}} (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = (a-x)^{-\frac{1}{2}} \ (a > 0)$.

5. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten:

a) $3^{4x^2-7x-14} \geq 9^{x^2-3x-4}$, b) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$,

c) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}$, d) $(\log_2 x)^{-1} - (\log_2 x - 1)^{-1} < 1$,

e) $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x-1}}\right) - 2 = \frac{1}{4} \lg 16 - \sqrt{x + \frac{1}{4} \lg 4}$.