Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

30. Mai 2012

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 4: Vektorfunktionen, Differenzialgleichungen, Eigenwertprobleme

Letzter Abgabetermin: 19. Juni 2012
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 4“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

Sämtliche Aufgaben sind ohne elektronische Hilfsmittel zu lösen!

1. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\sin t\\ 2\sin^2 t\\ 16t^2\end{pmatrix}$ im Punkt $(1,1,\pi^2)$!

2. Gesucht ist die Kurve $y=f(x)$, die durch den Punkt $(2,16)$ geht und für die in jedem Punkt $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ das von den Koordinatenachsen und den Geraden $x=\overline{x}$ und $y=f(\overline{x})$ begrenzte Rechteck viermal so groß ist wie die von den Koordinatenachsen, der Gerade $x=\overline{x}$ und der Kurve begrenzte Fläche.
   Hinweis: Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$.

3. Lösen Sie die Differenzialgleichung $y'(x)-y(x)\cos x=\sin x\cos x$!

4. Lösen Sie die inhomogenen linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten a) $y'=-2y+3$, b) $y'=-2y+3\cos 4x$!
   Verwenden Sie dabei zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung den Lösungsansatz in Form der rechten Seite („Störgliedansatz“)!

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:
   a) $\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}4 & 37\\ -\frac{1}{2} & -3\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}8 & 9 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ -8 & -2 & 7\end{pmatrix}$!

6. Ermitteln Sie die Eigenwerte und ein vollständiges System orthonormierter Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ -2 & 4 & -10\\ 5 & -10 & 25\end{pmatrix}$!
   Führen Sie die Diagonalisierung der Matrix mithilfe dieser Vektoren rechnerisch aus!
   Hinweis: Im Falle zweier linear unabhängiger Eigenvektoren zu einem Eigenwert erhält man orthogonale Eigenvektoren zu diesem Eigenwert, indem man einen der Eigenvektoren und die zu diesem orthogonale Komponente des anderen Eigenvektors (s. z.B. Aufgabe 4b) aus Übung 7 des 1. Semesters) verwendet.

Aufgabenkomplex 4: Vektorfunktionen, Differenzialgleichungen, Eigenwertprobleme

Letzter Abgabetermin: 19. Juni 2012

---

1. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\sin t\\ 2\sin^2 t\\ 16t^2\end{pmatrix}$ im Punkt $(1,1,\pi^2)$!

Lösung:

Aus $16t^2=\pi^2$ folgt $t=\pm\pi/4$, aus $\sqrt{2}\sin t=1$ dann $t=\pi/4$. Für dieses t ist auch $2\sin^2 t=1$ erfüllt.

$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\\pi^2\end{pmatrix}$ erhält man also für $t=\dfrac{\pi}{4}$.

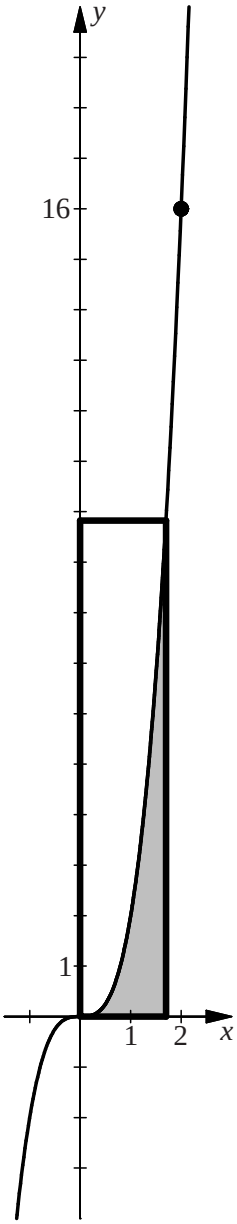
$$\vec{x}'(t)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos t\\ 4\sin t\cos t\\ 32t\end{pmatrix},\quad \vec{x}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\\8\pi\end{pmatrix}$$

Tangentengleichung: $\vec{x}_{\text{Tangente}}=\begin{pmatrix}1\\1\\\pi^2\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\2\\8\pi\end{pmatrix}$

2. Gesucht ist die Kurve $y=f(x)$, die durch den Punkt $(2,16)$ geht und für die in jedem Punkt $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ das von den Koordinatenachsen und den Geraden $x=\overline{x}$ und $y=f(\overline{x})$ begrenzte Rechteck viermal so groß ist wie die von den Koordinatenachsen, der Gerade $x=\overline{x}$ und der Kurve begrenzte Fläche.

Hinweis: Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$.

Lösung:



$$x\,f(x) = 4\int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\,f(x)) = 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$f(x)+x\,f'(x) = 4f(x)$$

Zu lösen ist also die Anfangswertaufgabe $\boxed{\begin{array}{l} x\,f'(x) = 3f(x), \\ f(2) = 16. \end{array}}$

Die Lösung der Differenzialgleichung kann durch Trennung der Veränderlichen erfolgen:

$$x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=3f, \quad \frac{\mathrm{d}f}{f}=3\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \ln f=3\ln x+\ln C, \quad f(x)=Cx^3$$

(Sonderfall $f=0$ und Beträge wie üblich).

Durch Einsetzen in die Anfangsbedingung $f(2)=16$ erhält man $8C=16$ und damit $C=2$, so dass $y=2x^3$ die gesuchte Kurve ist.

3. Lösen Sie die Differenzialgleichung $y'(x) - y(x)\cos x = \sin x \cos x$!

Lösung:

homogene Dgl.: $y' = y\cos x,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \cos x\,\mathrm{d}x,\ \ln y = \sin x + \ln C,\ y_{\text{hom}}(x) = C\mathrm{e}^{\sin x}$

(Behandlung von Division durch 0 und Beträgen wie üblich)

inhom. Dgl.: Ansatz Variation der Konstanten: $y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{\sin x}$,

$y'(x) = C'(x)\,\mathrm{e}^{\sin x} + C(x)\,\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$

$C'\mathrm{e}^{\sin x} + C\mathrm{e}^{\sin x}\cos x - C\mathrm{e}^{\sin x}\cos x = \sin x\cos x,$

$C' = \mathrm{e}^{-\sin x}\sin x\cos x,\ C = \displaystyle\int \mathrm{e}^{-\sin x}\sin x\,\mathrm{d}\sin x,$

$\displaystyle\int \mathrm{e}^{-t}t\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t}t + \int \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-t}(t+1) + D,$

$$C = -\mathrm{e}^{-\sin x}(\sin x + 1) + D,\quad y(x) = \underbrace{\underbrace{-(\sin x+1)}_{\substack{\text{spez. Lösung}\\ \text{inhom. Dgl.}}} + \underbrace{D\mathrm{e}^{\sin x}}_{\substack{\text{allg. Lösung}\\ \text{homog. Dgl.}}}}_{\text{allg. Lösung inhomog. Dgl.}},\quad D \in \mathbb{R}$$

---

4. Lösen Sie die inhomogenen linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten a) $y' = -2y + 3$, b) $y' = -2y + 3\cos 4x$!
Verwenden Sie dabei zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung den Lösungsansatz in Form der rechten Seite („Störgliedansatz“)!

Lösung:

homogen: $y' = -2y$, Ansatz: $y = C\mathrm{e}^{\lambda x},\ \lambda\mathrm{e}^{\lambda x} = -2\mathrm{e}^{\lambda x},\ -2-\lambda = 0,\ \lambda = -2,$
allgemeine Lösung der homogenen Dgl.: $y = C\mathrm{e}^{-2x}$

inhomogen:

a) Inhomogenität: „rechte Seite“: $c(x) = 3$
Ansatz: $y(x) = A,\ y'(x) = 0$

Einsetzen in inhomogene Dgl.: $0 = -2A + 3,\ A = \dfrac{3}{2}$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y = \dfrac{3}{2}$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y = C\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{3}{2}$

b) Inhomogenität: „rechte Seite“: $c(x) = 3\cos 4x\ \ (+0\sin 4x)$
Ansatz: $y(x) = A\cos 4x + B\sin 4x,\ y'(x) = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x$

Einsetzen in inhomogene Dgl.:
$-4A\sin 4x + 4B\cos 4x = -2A\cos 4x - 2B\sin 4x + 3\cos 4x = (-2A+3)\cos 4x - 2B\sin 4x$

Koeffizientenvergleich: $\sin 4x:\quad -4A = -2B \qquad B = 2A$
$\cos 4x:\quad 4B = -2A + 3 \qquad 8A = -2A + 3,\ A = \dfrac{3}{10},\ B = \dfrac{6}{10}$

spezielle Lösung der inhomogenen Dgl.: $y = \dfrac{3}{10}\cos 4x + \dfrac{6}{10}\sin 4x$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.: $y = C\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{3}{10}\cos 4x + \dfrac{6}{10}\sin 4x$

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 4 & 37 \\ -\frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -8 & -2 & 7 \end{pmatrix}$!

Lösung:

a) Eigenwerte: $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda)+6 = \lambda^2-\lambda-6 = 0$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 3 & -6 \\ \hline 1 & -2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1-2x_2=0,\ x_1=2x_2, \\ x_2=C,\ x_1=2C \\ \text{EV } C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = -2$:

$$\begin{array}{cc} 6 & -2 \\ 3 & -1 \\ \hline -3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} -3x_1+x_2=0,\ x_2=3x_2, \\ x_1=C,\ x_2=3C \\ \text{EV } D\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Eigenwerte:

$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 37 \\ -\frac{1}{2} & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda)+\frac{37}{2} = \lambda^2-\lambda-12+\frac{37}{2} = \lambda^2-\lambda+\frac{13}{2} = 0$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{26}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}\mathrm{i}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = \frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i}$:

$$\begin{array}{cc} \frac{7}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i} & 37 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i} \\ \hline 7-5\mathrm{i} & 74 \\ -1 & -7-5\mathrm{i} \\ \hline 1 & 7+5\mathrm{i} \\ 7-5\mathrm{i} & 74 \\ \hline 1 & 7+5\mathrm{i} \\ 0 & 74-(7-5\mathrm{i})(7+5\mathrm{i})=0 \\ \hline 1 & 7+5\mathrm{i} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1+(7+5\mathrm{i})x_2=0, \\ x_1=(-7-5\mathrm{i})x_2 \\ \text{EV } C\begin{pmatrix} -7-5\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = \frac{1}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}$:

$$\begin{array}{cc} \frac{7}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i} & 37 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i} \\ \hline 7+5\mathrm{i} & 74 \\ -1 & -7+5\mathrm{i} \\ \hline 1 & 7-5\mathrm{i} \\ 7+5\mathrm{i} & 74 \\ \hline 1 & 7-5\mathrm{i} \\ 0 & 74-(7+5\mathrm{i})(7-5\mathrm{i})=0 \\ \hline 1 & 7-5\mathrm{i} \end{array} \qquad \begin{array}{l} x_1+(7-5\mathrm{i})x_2=0, \\ x_1=(-7+5\mathrm{i})x_2 \\ \text{EV } D\begin{pmatrix} -7+5\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

c)
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 8-\lambda & 9 & 2 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ -8 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda(8-\lambda)(7-\lambda)+144-4-16\lambda-9(7-\lambda)-4(8-\lambda) \\ &= -\lambda(\lambda^2-15\lambda+56)+140-16\lambda-63+9\lambda-32+4\lambda \\ &= -\lambda^3+15\lambda^2-56\lambda+45-\lambda = -\lambda^3+15\lambda^2-59\lambda+45 = 0 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\lambda_1 = 1$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

$(\lambda^3-15\lambda^2+59\lambda-45) : (\lambda-1) = \lambda^2-14\lambda+45, \quad \lambda_{2/3} = 7 \pm \sqrt{49-45} = \begin{cases} 5 \\ 9 \end{cases}$

$$\begin{array}{l} \underline{\lambda^3 - \lambda^2} \\ \quad -14\lambda^2+59\lambda-45 \\ \quad \underline{-14\lambda^2+14\lambda} \\ \qquad\qquad 45\lambda-45 \\ \qquad\qquad \underline{45\lambda-45} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

EV zu EW $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{array}{rrr} 7 & 9 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -8 & -2 & 6 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ 7 & 9 & 2 \\ -8 & -2 & 6 \\ \hline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 16 & 16 \\ 0 & -10 & -10 \\ \hline 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

EV $C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{array}{rrr} 3 & 9 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -8 & -2 & 2 \\ \hline 1 & -5 & -2 \\ 3 & 9 & 2 \\ -8 & -2 & 2 \\ \hline 1 & -5 & -2 \\ 0 & 24 & 8 \\ 0 & -42 & -14 \\ \hline 1 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

EV $D\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_3 = 9$:

$$\begin{array}{rrr} -1 & 9 & 2 \\ 1 & -9 & 2 \\ -8 & -2 & -2 \\ \hline 1 & -9 & -2 \\ -1 & 9 & 2 \\ -8 & -2 & -2 \\ \hline 1 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -74 & -18 \\ \hline 1 & -9 & -2 \\ 0 & \frac{37}{9} & 1 \\ \hline 1 & -\frac{7}{9} & 0 \\ 0 & \frac{37}{9} & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{7}{9}x_2 &= 0 \\ \tfrac{37}{9}x_2 + \quad x_3 &= 0 \end{aligned}$$

EV $\widetilde{E}\begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ 1 \\ -\frac{37}{9} \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -37 \end{pmatrix}$

---

6. Ermitteln Sie die Eigenwerte und ein vollständiges System orthonormierter Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 5 & -10 & 25 \end{pmatrix}$!

Führen Sie die Diagonalisierung der Matrix mithilfe dieser Vektoren rechnerisch aus!

Hinweis: Im Falle zweier linear unabhängiger Eigenvektoren zu einem Eigenwert erhält man orthogonale Eigenvektoren zu diesem Eigenwert, indem man einen der Eigenvektoren und die zu diesem orthogonale Komponente des anderen Eigenvektors (s. z.B. Aufgabe 4b) aus Übung 7 des 1. Semesters) verwendet.

Lösung:

Die betrachtete Matrix ist symmetrisch. Folglich sind alle Eigenwerte reell und zu jedem Eigenwert gehören linear unabhängige Eigenvektoren entsprechend seiner Vielfachheit, d.h. die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts ist gleich seiner arithmetische Vielfachheit. Ferner sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 5 \\ -2 & 4-\lambda & -10 \\ 5 & -10 & 25-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(25-\lambda)+100+100-25(4-\lambda)-100(1-\lambda)-4(25-\lambda)$$

$$= (4-5\lambda+\lambda^2)(25-\lambda)+200-300+129\lambda = 100-125\lambda+25\lambda^2-4\lambda+5\lambda^2-\lambda^3-100+129\lambda$$

$$= -\lambda^3+30\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda-30) = 0, \quad \text{Eigenwerte: } \lambda_{1/2} = 0 \text{ (doppelter EW)}, \ \lambda_3 = 30$$

Für EW $\lambda_{1/2} = 0$:

$$\begin{array}{rrr} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 5 & -10 & 25 \\ \hline 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$x = 2y - 5z, \ \vec{x} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die linear unabhängigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix}$ sind nicht orthogonal. Wir nehmen deshalb $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ und suchen einen dazu orthogonalen Eigenvektor $\vec{x}_2$ in der Form $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. Dann muss $\left(\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = -10-5\lambda = 0$, also $\lambda = -2$ gelten.

Damit ergibt sich $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ als zu $\vec{x}_1$ orthogonaler Eigenvektor.

Für EW $\lambda_3 = 30$:

$$\begin{array}{rrr} -29 & -2 & 5 \\ -2 & -26 & -10 \\ 5 & -10 & -5 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ -1 & -13 & -5 \\ -29 & -2 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -15 & -6 \\ 0 & -60 & -24 \\ \hline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \qquad \text{EV} \begin{pmatrix}\frac{1}{5}\\-\frac{2}{5}\\1\end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}.$$

Orthonormierte EV sind dann $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ zu 0 und $\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$ zu 30.

Die Matrix aus diesen drei Vektoren ist orthogonal.

Orthogonale Matrix aus orthonormierten EV: $\boldsymbol{V} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}2\sqrt{6} & -\sqrt{5} & 1\\ \sqrt{6} & 2\sqrt{5} & -2\\ 0 & \sqrt{5} & 5\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{V}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix}2\sqrt{6} & \sqrt{6} & 0\\ -\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5}\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ -2 & 4 & -10\\ 5 & -10 & 25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt{6} & -\sqrt{5} & 1\\ \sqrt{6} & 2\sqrt{5} & -2\\ 0 & \sqrt{5} & 5\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix}2\sqrt{6} & \sqrt{6} & 0\\ -\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & \sqrt{5}\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 30\\ 0 & 0 & -60\\ 0 & 0 & 150\end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 300\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 30\end{pmatrix}$$