Technische Universität Chemnitz 8. Mai 2012
Fakultät für Mathematik

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 3: Integralrechnung

Letzter Abgabetermin: 30. Mai 2012
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 3“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

Elektronische Hilfsmittel dürfen nur zur zahlenmäßigen Bestimmung von Stammfunktionswerten bei den Aufgaben 4 und 5 verwendet werden!

1. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale durch Substitution:

   a) $\int (\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x})\,\mathrm{d}x$, b) $\int (2\sin 3x + 3\cos 4x)\,\mathrm{d}x$, c) $\int \sqrt[7]{6x+5}\,\mathrm{d}x$,

   d) $\int \frac{(\ln x^3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$, e) $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$, f) $\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+5}\,\mathrm{d}x$,

   g) $\int \mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x$!

2. Erläutern Sie den Begriff Riemannsche Integralsumme!

3. Ermitteln Sie durch partielle Integration das Integral $\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$!

4. Ermitteln Sie den Inhalt der von $y = -x^3 + 9x^2 - 23x + 15$ und der x-Achse begrenzten Fläche!

5. Ein Fahrzeug fährt vom Zeitpunkt $t=0$ bis zum Zeitpunkt $t=1$ (in h) mit der Geschwindigkeit $v(t) = 100 + 10\frac{t^2-9}{t^2+9}$ (in km/h). Welchen Weg legt es in dieser Zeit zurück?

6. Über einem endlichen oder unendlichen Intervall der reellen Achse wird $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x-2}}$ betrachtet.

   a) Für welche a und b handelt es sich dabei um
      (i) ein bestimmtes Integral,
      (ii) ein konvergentes uneigentliches Integral,
      (iii) ein bestimmt divergentes uneigentliches Integral bzw.
      (iv) ein unbestimmt divergentes uneigentliches Integral?

   b) Berechnen Sie das Integral in dem Fall, dass eine der beiden Integrationsgrenzen 18 ist und die andere Integrationsgrenze so gewählt wird, dass es sich um ein konvergentes uneigentliches Integral handelt!

Aufgabenkomplex 3: Integralrechnung

Letzter Abgabetermin: 30. Mai 2012

---

1. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale durch Substitution:

a) $\int (\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x})\,\mathrm{d}x$, b) $\int (2\sin 3x+3\cos 4x)\,\mathrm{d}x$, c) $\int \sqrt[7]{6x+5}\,\mathrm{d}x$,

d) $\int \frac{(\ln x^3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$, e) $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$, f) $\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+5}\,\mathrm{d}x$,

g) $\int \mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

a) $\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(-x)-\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(-2x)=-\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+C$

(Dabei sind die Substitutionen $t=-x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-1$, $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$ und $t=-2x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-2$, $\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}t$ verwendet worden.)

b) $\int (2\sin 3x+3\cos 4x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int \sin 3x\,\mathrm{d}3x+\frac{3}{4}\int \cos 4x\,\mathrm{d}4x=-\frac{2}{3}\cos 3x+\frac{3}{4}\sin 4x+C$

(Dabei sind die Substitutionen $t=3x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=3$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$ und $t=4x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=4$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\mathrm{d}t$ verwendet worden.)

c) $\int \sqrt[7]{6x+5}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int (6x+5)^{\frac{1}{7}}\mathrm{d}(6x+5)=\frac{1}{6}\frac{7}{8}(6x+5)^{\frac{8}{7}}+C=\frac{7}{48}(6x+5)\sqrt[7]{6x+5}+C$

(Dabei ist die Substitution $t=6x+5$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=6$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\mathrm{d}t=\frac{1}{6}\mathrm{d}(6x+5)$ verwendet worden.)

d) $\int \frac{(\ln x^3)^2}{x}\mathrm{d}x=\int (3\ln x)^2\frac{\mathrm{d}x}{x}=9\int (\ln x)^2\mathrm{d}\ln x=9\frac{1}{3}(\ln x)^3+C=3(\ln x)^3+C$

(Dabei ist die Substitution $t=\ln x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$, $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}t=\mathrm{d}\ln x$ verwendet worden.)

e) $\int \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x^2}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\arctan x^2+C$

(Dabei ist die Substitution $t=x^2$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=2x$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{d}x^2$ verwendet worden.)

f) $\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+5}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{3x}+5)}{\mathrm{e}^{3x}+5}=\frac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{3x}+5)+C$

(Dabei ist die Substitution $t=\mathrm{e}^{3x}+5$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=3\mathrm{e}^{3x}$, $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$ verwendet worden.)

g) $\int \mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$$=\mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}+C$$

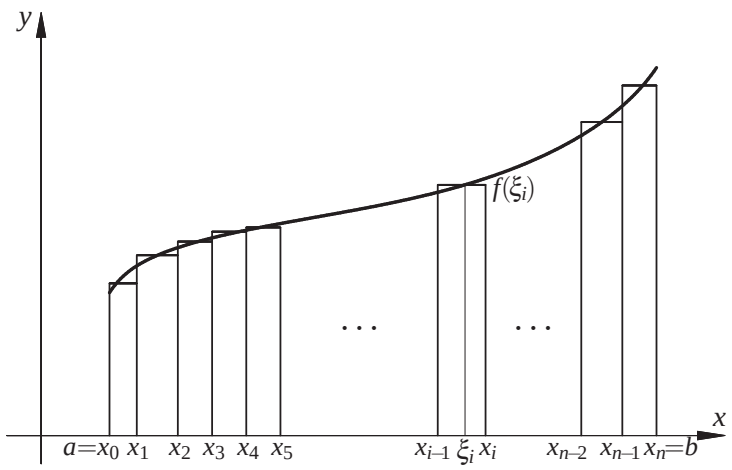
(Dabei ist die Substitution $t = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $\mathrm{d}t = (5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x$ verwendet worden.)

---

2. Erläutern Sie den Begriff Riemannsche Integralsumme!

Lösung:

Die Riemannsche Integralsumme wird bei der Definition des bestimmten Integrals einer (beschränkten und stückweise steigen) Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a,b]$ eingeführt. Dazu wird das Intervall durch $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ in n Teilintervalle zerlegt und in jedem Teilintervall ein Punkt $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gewählt.



$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1})$ wird als eine **Riemannsche Integralsumme** von $f(x)$ über dem Intervall $[a,b]$ bezeichnet. Mit der Bezeichnung $(\Delta x)_i = x_i - x_{i-1}$ wird dann das bestimmte Integral als Grenzwert der Riemannsche Integralsummen $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max(\Delta x)_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(\Delta x)_i$ definiert.

(Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Zerlegungs- und Zwischenpunkte.)

Geometrisch kann man sich dies durch Zerlegung der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ in (schmale) Streifen vorstellen, von denen jeder durch eine Rechteckfläche der Höhe $f(\xi_i)$ approximiert wird. Die Riemannsche Integralsumme ist dann die Summe dieser Rechteckflächen, bei Verfeinerung der Zerlegung ergibt sich als Grenzwert der Flächeninhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$.

Riemannsche Integralsummen können auch zur näherungsweisen Berechnung bestimmte Integrale genutzt werden.

---

3. Ermitteln Sie durch partielle Integration das Integral $\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

$$\int\limits_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}} - \int\limits_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{2\mathrm{e}^3 + 1}{9}$$

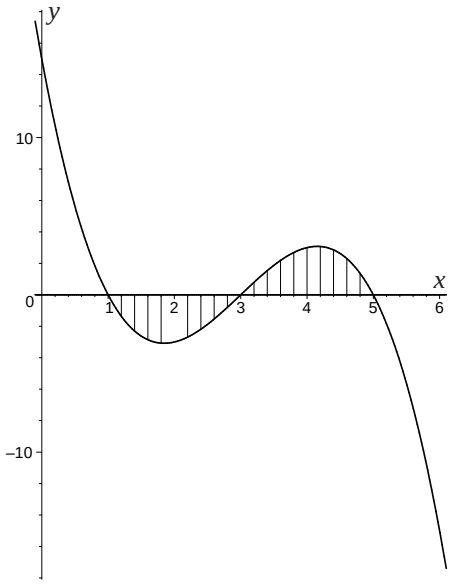
4. Ermitteln Sie den Inhalt der von $y = -x^3 + 9x^2 - 23x + 15$ und der x-Achse begrenzten Fläche!

Lösung:

$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ für $x_1 = 1$, $(x^3 - 9x^2 + 23x - 15) : (x-1) = x^2 - 8x + 15$,

$$\begin{array}{l} \underline{x^3 - x^2} \\ \quad -8x^2 + 23x - 15 \\ \quad \underline{-8x^2 + 8x} \\ \qquad\quad 15x - 15 \\ \qquad\quad \underline{15x - 15} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{16-15} = 3;\ 5$



$$-x^3 + 9x^2 - 23x + 15 = -(x-1)(x-3)(x-5)$$

$$\begin{aligned} &\int_1^5 |-x^3+9x^2-23x+15|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^3 (x^3-9x^2+23x-15)\,\mathrm{d}x - \int_3^5 (x^3-9x^2+23x-15)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^4}{4} - 3x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 15x \left(\Big|_1^3 - \Big|_3^5 \right) \\ &= 2F(3) - F(1) - F(5) \\ &= 2\cdot(-2{,}25) - (-6{,}25) - (-6{,}25) = \underline{\underline{8}} \end{aligned}$$

---

5. Ein Fahrzeug fährt vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Zeitpunkt $t = 1$ (in h) mit der Geschwindigkeit $v(t) = 100 + 10\dfrac{t^2-9}{t^2+9}$ (in km/h). Welchen Weg legt es in dieser Zeit zurück?

Lösung:

Ist $s(t)$ der von dem Fahrzeug zurückgelegte Weg, so gilt $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, also ist $s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t$. Ohne eine Ortsangabe zu einem bestimmten Zeitpunkt („Anfangsbedingung“), ist der Ort nur bis auf eine Konstante bestimmt. darauf kommt es aber hier nicht an, da der zwischen zwei Zeitpunkten zurückgelegte Weg gesucht ist. Für den gesuchten Weg gilt dann

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(100 + 10\frac{t^2+9-18}{t^2+9}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(110 - \frac{180}{t^2+9}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(110 - \frac{1}{9}\,\frac{180}{(\frac{t}{3})^2+1}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(110\,\mathrm{d}t - \frac{20\cdot 3\,\mathrm{d}\frac{t}{3}}{(\frac{t}{3})^2+1}\right) = 110t - 60\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^1 \\ &= 110 - 60\arctan\frac{1}{3} \approx 90{,}695, \text{ er beträgt also ca. } 90{,}695 \text{ km.} \end{aligned}$$

6. Über einem endlichen oder unendlichen Intervall der reellen Achse wird $\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x-2}}$ betrachtet.

a) Für welche a und b handelt es sich dabei um
   (i) ein bestimmtes Integral,
   (ii) ein konvergentes uneigentliches Integral,
   (iii) ein bestimmt divergentes uneigentliches Integral bzw.
   (iv) ein unbestimmt divergentes uneigentliches Integral?

b) Berechnen Sie das Integral in dem Fall, dass eine der beiden Integrationsgrenzen 18 ist und die andere Integrationsgrenze so gewählt wird, dass es sich um ein konvergentes uneigentliches Integral handelt!

Lösung:

a) Wir setzen $a \leq b$ voraus.

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}$ ist über dem Intervall $(2,\infty)$ definiert und stetig und es gilt $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \infty$. Damit es sich um ein bestimmtes oder uneigentliches Integral handelt, muss also $2 \leq a$ gelten.

Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}} = (x-2)^{-\frac{1}{4}}$ ist $F(x) = \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{4}} + C$.

Für diese gilt $\lim\limits_{x\to 2+0} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$.

(i) Da $f(x)$ über jedem Intervall $[a,b]$ mit $2 < a \leq b < \infty$ stetig und beschränkt ist, handelt es sich in diesen Fällen um ein bestimmtes Integral.

(ii) Wegen $\lim\limits_{x\to 2+0} F(x) = 0$ handelt es sich für $2 = a < b < \infty$ um ein konvergentes uneigentliches Integral.

(iii) Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$ handelt es sich für $2 \leq a < b = \infty$ um ein bestimmt divergentes uneigentliches Integral.

(iv) Wegen der oben beschrieben Eigenschaften von $f(x)$ kann es sich in keinem Fall um ein unbestimmt divergentes uneigentliches Integral handeln.

b) Nach a)(ii) muss $a = 2,\ b = 18$ gewählt werden.

$$\int\limits_2^{18} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x-2}} = \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{4}}\Big|_2^{18} = \frac{4}{3}16^{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}2^3 = \frac{4}{3}8 = \frac{32}{3}$$