Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

25. April 2012

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 2: Differenzialrechnung

Letzter Abgabetermin: 15. Mai 2012
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 2“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

Elektronische Hilfsmittel dürfen nur bei Aufgabe 1 sowie zur zahlenmäßigen Bestimmung von Funktionswerten bei den Aufgaben 2, 3c) und 5 verwendet werden!

1. Ermitteln Sie eine Näherung für die kleinste positive Lösung der Gleichung $\tan x = x$, indem Sie auf die Gleichung $\sin x - x\cos x = 0$ das Newtonverfahren anwenden!

   Hinweis: Fertigen Sie zur Bestimmung eines geeigneten Startwertes eine Skizze an!

2. Die vertikale Bewegung eines Körpers werde durch seine Höhe h gegenüber einer Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben: $h(t) = (t^3 - 2t^2 - 3t)\mathrm{e}^{-t}$. Diskutieren Sie die Funktion und gehen Sie insbesondere auf folgende Fragen ein:
   (A) Wann befindet sich der Körper an der Wasseroberfläche?
   (B) Wie groß ist seine höchste Höhe im Zeitintervall $[0,\infty)$?
   (C) Wie tief taucht er im Zeitintervall $[0,\infty)$ maximal ein?
   (D) Wann steigt und wann fällt die Höhe im Zeitintervall $[0,\infty)$ am schnellsten?
   (E) Skizzieren Sie die Funktion!

3. Die vom Preis p abhängige Nachfragefunktion eines Produktes laute $f(p) = \dfrac{1\,000\,000}{3p+5}$.
   a) Ermitteln Sie die Preiselastiziät der Nachfrage!
   b) Wo ist die Nachfrage elastisch, proportionalelastisch bzw. unelastisch?
   c) Ermitteln Sie für einen Preis von $p = 5$ die Auswirkungen einer Preiserhöhung von 1 % mit Hilfe der Elastizität sowie exakt!
   d) Wie verhält sich die Elastizität für $p \to \infty$?

4. Seien a und b positive Parameter. Wenden Sie die l'Hospitalsche Regel auf folgende Grenzwerte an:
   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{bx}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{bx^2}$, c) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$, d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}$!

5. Wie sind die Ausmaße einer zylindrischen Konservendose zu wählen, damit sie einen Inhalt von 1 Liter hat und zu ihrer Herstellung möglichst wenig Material benötigt wird? Wie groß ist der Materialverbrauch pro Dose (ohne Verschnitt)?

6. Sei $f(x) = 16\sqrt{x}$. Berechnen Sie $f(1{,}1)$ näherungsweise durch Taylorentwicklung von $f(x)$ bis zum kubischen Glied an der Stelle $x_0 = 1$ und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes ab!

Aufgabenkomplex 2: Differenzialrechnung

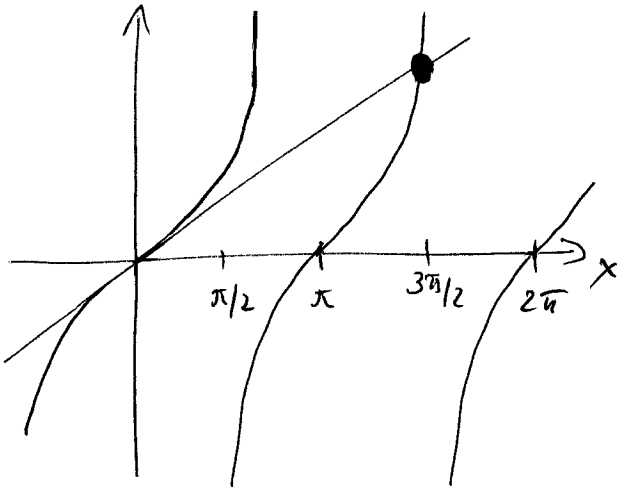
Letzter Abgabetermin: 15. Mai 2012

---

1. Ermitteln Sie eine Näherung für die kleinste positive Lösung der Gleichung $\tan x = x$, indem Sie auf die Gleichung $\sin x - x\cos x = 0$ das Newtonverfahren anwenden!

Hinweis: Fertigen Sie zur Bestimmung eines geeigneten Startwertes eine Skizze an!

Lösung:



Offensichtlich ist $\pi < x^* < \dfrac{3\pi}{2}$.

Für $\sin x - x\cos x = 0$ ist z.B. $x_0 = \dfrac{3\pi}{2}$ ein geeigneter Startwert.

$f(x) = \sin x - x\cos x, \qquad f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x$

Newtoniteration: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \dfrac{\sin x_n - x_n\cos x_n}{x_n \sin x_n}$

$$x_0 = \frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71238898, \qquad x_1 = \frac{3\pi}{2} - \frac{-1}{-\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3\pi} \approx 4{,}50018239$$

n	x_n
0	4,71238898
1	4,50018239
2	4,49341954
3	4,49340946
4	4,49340946

$$\underline{\underline{x^* \approx 4{,}49340946}}$$

---

2. Die vertikale Bewegung eines Körpers werde durch seine Höhe h gegenüber einer Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben: $h(t) = (t^3 - 2t^2 - 3t)\mathrm{e}^{-t}$. Diskutieren Sie die Funktion und gehen Sie insbesondere auf folgende Fragen ein:

(A) Wann befindet sich der Körper an der Wasseroberfläche?
(B) Wie groß ist seine höchste Höhe im Zeitintervall $[0,\infty)$?
(C) Wie tief taucht er im Zeitintervall $[0,\infty)$ maximal ein?
(D) Wann steigt und wann fällt die Höhe im Zeitintervall $[0,\infty)$ am schnellsten?
(E) Skizzieren Sie die Funktion!

Lösung:

Ohne Ableitung festzustellende Eigenschaften
(Definitionsbereich, Stetigkeit, asymptotisches Verhalten, Achsenschnittpunkte):

definiert und stetig über $\mathbb{R}$

Nullstellen: $(t^3-2t^2-3t)\mathrm{e}^{-t}=t(t^2-2t-3)\mathrm{e}^{-t}=0$ für $t_1=0,\ t_{2/3}=1\pm\sqrt{1+3}=\begin{cases}3\\-1\end{cases}$

Schnitt mit der vertikalen Achse (Zeitpunkt $t=0$): für $h(0)=0$

asymptotisches Verhalten: $\lim\limits_{t\to-\infty} h(t)=-\infty\cdot\infty=-\infty$,

$$\lim_{t\to\infty} h(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{t^3-2t^2-3t}{\mathrm{e}^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2-4t-3}{\mathrm{e}^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{6t-4}{\mathrm{e}^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{6}{\mathrm{e}^t}=0$$

Mit 1. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Monotonie, Extremwerte):

$\dot h(t)=(3t^2-4t-3)\mathrm{e}^{-t}-(t^3-2t^2-3t)\mathrm{e}^{-t}=-(t^3-5t^2+t+3)\mathrm{e}^{-t}=0$ offensichtlich für $t_1=1$,

$(t^3-5t^2+t+3):(t-1)=t^2-4t+3,\quad t_{2/3}=2\pm\sqrt{4+3}=\begin{cases}2+\sqrt{7}\approx\ \ 4{,}6458\\2-\sqrt{7}\approx-0{,}6458\end{cases}$

$$\begin{array}{l}
\underline{t^3-t^2}\\
\quad -4t^2+t+3\\
\quad \underline{-4t^2+4t\qquad}\\
\qquad\quad -3t+3\\
\qquad\quad \underline{-3t+3}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$\dot h(t)=-\big(t-(2-\sqrt{7})\big)\big(t-1\big)\big(t-(2+\sqrt{7})\big)\mathrm{e}^{-t}$

$$\dot h(t)\begin{cases}
>0 & t<2-\sqrt{7} & \text{monoton wachsend} & \\
=0 & t=2-\sqrt{7} & & \text{lokales Maximum } h(2-\sqrt{7})\approx1{,}5908\\
<0 & 2-\sqrt{7}<t<1 & \text{monoton fallend} & \\
=0 & t=1 & & \text{lokales Minimum } h(1)\approx-1{,}4715\\
>0 & 1<t<2+\sqrt{7} & \text{monoton wachsend} & \\
=0 & t=2+\sqrt{7} & & \text{lokales Maximum } h(2+\sqrt{7})\approx0{,}4145\\
<0 & t>2+\sqrt{7} & \text{monoton fallend} &
\end{cases}$$

Wertebereich $(-\infty, h(2-\sqrt{7})$

Mit 2. Ableitung festzustellende Eigenschaften (Krümmung, Wendepunkte):

$\ddot h(t)=(-3t^2+10t-1)\mathrm{e}^{-t}+(t^3-5t^2+t+3)\mathrm{e}^{-t}=(t^3-8t^2+11t+2)\mathrm{e}^{-t}=0$ offensichtlich für $t_1=2$,

$(t^3-8t^2+11t+2):(t-2)=t^2-6t-1,\quad t_{2/3}=3\pm\sqrt{9+1}=\begin{cases}3+\sqrt{10}\approx\ \ 6{,}1623\\3-\sqrt{10}\approx-0{,}1623\end{cases}$

$$\begin{array}{l}
\underline{t^3-2t^2}\\
\quad -6t^2+11t+2\\
\quad \underline{-6t^2+12t\qquad}\\
\qquad\quad -t+2\\
\qquad\quad \underline{-t+2}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$\ddot h(t)=\big(t-(3-\sqrt{10})\big)\big(t-2\big)\big(t-(3+\sqrt{10})\big)\mathrm{e}^{-t}$

$$\ddot h(t)\begin{cases}
<0 & t<3-\sqrt{10} & \text{konkav} & \\
=0 & t=3-\sqrt{10} & & \text{Wendepunkt } h(3-\sqrt{10})\approx0{,}5056\\
>0 & 3-\sqrt{10}<t<2 & \text{konvex} & \\
=0 & t=2 & & \text{Wendepunkt } h(2)\approx-0{,}8120\\
<0 & 2<t<3+\sqrt{10} & \text{konkav} & \\
=0 & t=3+\sqrt{10} & & \text{Wendepunkt } h(3+\sqrt{10})\approx0{,}2941\\
>0 & t>3+\sqrt{10} & \text{konvex} &
\end{cases}$$

(A) Der Körper befindet sich zu den Zeitpunkten -1, 0 und 3 an der Wasseroberfläche.

(B) Die größte Höhe von ca. 0,4145 wird zum Zeitpunkt $t = 2+\sqrt{7} \approx 4{,}6458$ erreicht.

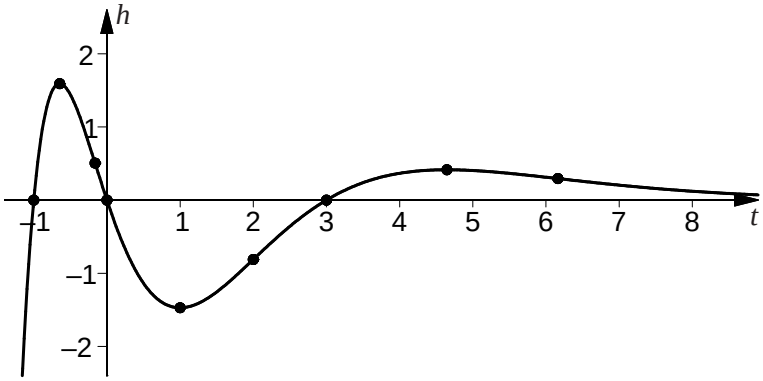
(C) Die größte Tauchtiefe von ca. $-1{,}4715$ wird zum Zeitpunkt $t = 1$ erreicht.

(D) Die schnellste Höhenänderung kann nur in Randpunkten des Intervalls oder in Wendepunkten vorliegen. In Letzteren ist nämlich die Ableitung der Geschwindigkeit $\dot{h}(t)$ gleich 0 und wechselt das Vorzeichen.

Da der Körper im Intervall $[0\,,\infty)$ nur in einem im Inneren liegenden Bereich steigt, steigt er bei Erreichen des Wendepunktes zum Zweitpunkt $t = 2$ am schnellsten auf.

An den Rändern des Intervalls fällt der Körper, dabei ist $\dot{h}(0) = -3$ und $\dot{h}(\infty) = 0$. In dem im Intervall $[0\,,\infty)$ liegenden Wendepunkt $3+\sqrt{10} \approx 6{,}1623$ beträgt die Geschwindigkeit dagegen $\dot{h}(3+\sqrt{10}) \approx -0{,}1123$, so dass die Höhe für $t = 0$ am schnellsten fällt.

(E)



t		$h(t)$	$\dot{h}(t)$	$\ddot{h}(t)$
-1	-1	**0**	10,8731	$-48{,}9291$
$2-\sqrt{7}$	$-0{,}6458$	1,5908	**0**	$-16{,}6108$
$3-\sqrt{10}$	$-0{,}1623$	0,5056	$-$ 3,1778	**0**
0	0	**0**	$-$ 3	2
1	1	$-1{,}4715$	**0**	2,2073
2	2	$-0{,}8120$	0,9473	**0**
3	3	**0**	0,5974	$-$ 0,4979
$2+\sqrt{7}$	4,6458	0,4145	**0**	$-$ 0,1852
$3+\sqrt{10}$	6,1623	0,2941	$-$ 0,1123	**0**

---

3. Die vom Preis p abhängige Nachfragefunktion eines Produktes laute $f(p) = \dfrac{1\,000\,000}{3p+5}$.

a) Ermitteln Sie die Preiselastiziät der Nachfrage!
b) Wo ist die Nachfrage elastisch, proportionalelastisch bzw. unelastisch?
c) Ermitteln Sie für einen Preis von $p = 5$ die Auswirkungen einer Preiserhöhung von 1 % mit Hilfe der Elastizität sowie exakt!
d) Wie verhält sich die Elastizität für $p \to \infty$?

Lösung:

a) $f'(p) = -\dfrac{3\,000\,000}{(3p+5)^2}$, $\varepsilon_f(p) = \dfrac{f'(p)}{f(p)}p = \dfrac{-\frac{3\,000\,000}{(3p+5)^2}}{\frac{1\,000\,000}{3p+5}}p = \underline{\underline{-\dfrac{3p}{3p+5}}}$

b) Es ist nur $p \geq 0$ sinnvoll. Dann gilt aber $0 \leq 3p < 3p+5$ und daher $|\varepsilon_f(p)| = \dfrac{3p}{3p+5} < 1$.
Die Nachfrage ist also überall preis-unelastisch.

c) $\varepsilon_f(5) = -\frac{15}{20} = -0{,}75$. Mit Hilfe der Elastizität ist deshalb festzustellen, dass eine Erhöhung des Preises um 1 % zu einer Verminderung der Nachfrage um 0,75 % führt. Tatsächlich gilt $f(5) = 50\,000$ und $f(5{,}05) = 49\,627{,}792$, so dass der Rückgang $\frac{50\,000 - 49\,627{,}792}{50\,000} \approx 0{,}744$ % beträgt.

d) Für $p \to \infty$ gilt $\varepsilon_f(p) \longrightarrow -1$, also Annäherung an Proportionalelastizität.

(Z.B. gilt schon für $p = 100$ $\varepsilon_f(p) \approx -0{,}984$, eine Preiserhöhung um 1 % führt zu einem Nachfragerückgang um 0,984 %.)

---

4. Seien a und b positive Parameter. Wenden Sie die l'Hospitalsche Regel auf folgende Grenzwerte an:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{bx}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{bx^2}$, c) $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$, d) $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$!

Lösung:

a) $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{bx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a \sin ax}{b} = 0$

b) $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{bx^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a \sin ax}{2bx} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{a^2 \cos ax}{2b} = \frac{a^2}{2b}$

(Auch der zweite Grenzwert hat die Form $\frac{0}{0}$, deshalb ist die l'Hospitalsche Regel nochmals anwendbar.)

c) $\frac{-\infty}{-\infty}$: $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx} = \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\frac{a\cos ax}{\sin ax}}{\frac{b\cos bx}{\sin bx}} = \frac{a}{b} \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin bx}{\sin ax} = \frac{a}{b} \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{b\cos bx}{a\cos ax} = 1$

(Der dritte Grenzwert hat die Form $\frac{0}{0}$, deshalb ist die l'Hospitalsche Regel nochmals anwendbar.)

d) $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{a^x \ln a - a\,x^{a-1}}{1} = a^a \ln a - a\,a^{a-1} = a^a(\ln a - 1)$

---

5. Wie sind die Ausmaße einer zylindrischen Konservendose zu wählen, damit sie einen Inhalt von 1 Liter hat und zu ihrer Herstellung möglichst wenig Material benötigt wird? Wie groß ist der Materialverbrauch pro Dose (ohne Verschnitt)?

Lösung:

$V = \pi r^2 h = 1\,[\mathrm{dm}^3]$, $h = \frac{1}{\pi r^2}$, $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} \to \min$,

$$O' = 4\pi r - \frac{2}{r^2} \begin{cases} < 0 & r < \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad \text{monoton fallend} \\ = 0 & r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad \text{Minimum} \\ > 0 & r > \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad \text{monoton wachsend} \end{cases}$$

minimaler Materialverbrauch bei $r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \approx 0{,}5419\,\mathrm{dm}$, $h \approx \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}} = 2r \approx 1{,}0838\,\mathrm{dm}$,

Materialverbrauch dabei $O = 6\pi r^2 \approx 5{,}54\,\mathrm{dm}^2$

6. Sei $f(x)=16\sqrt{x}$. Berechnen Sie $f(1{,}1)$ näherungsweise durch Taylorentwicklung von $f(x)$ bis zum kubischen Glied an der Stelle $x_0=1$ und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes ab!

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 16\sqrt{x}=16x^{\frac{1}{2}} & f(1) &= 16 \\ f'(x) &= 8x^{-\frac{1}{2}} & f'(1) &= 8 \\ f''(x) &= -4x^{-\frac{3}{2}} & f''(1) &= -4 \\ f'''(x) &= 6x^{-\frac{5}{2}} & f'''(1) &= 6 \\ f^{(4)}(x) &= -15x^{-\frac{7}{2}} & f^{(4)}(1) &= -15 \end{aligned}$$

$$f(x)=16+8(x-1)-\frac{4}{2}(x-1)^2+\frac{6}{6}(x-1)^3+R_3(x,1)=\underbrace{16+8(x-1)-2(x-1)^2+(x-1)^3}_{T_3(x,1)}+R_3(x,1)$$

$$T_3(1{,}1\,,1)=16+8\cdot 0{,}1-2\cdot 0{,}01+0{,}001=16+0{,}8-0{,}02+0{,}001=\underline{\underline{16{,}781}}$$

$$R_3(1{,}1\,,1)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(1{,}1-1)^4=-\frac{15\,\xi^{-\frac{7}{2}}}{24}0{,}1^4,\quad 1<\xi<1{,}1$$

Da $\xi^{-\frac{7}{2}}$ monoton fallend ist, gilt für $1<\xi<1{,}1$, dass $\left|\xi^{-\frac{7}{2}}\right|<1$ ist.

Folglich ist $|R_3(1{,}1\,,1)|<\frac{15}{24}0{,}1^4=\frac{5}{8}0{,}0001=0{,}000\,062\,5$.

Die Fehler der Näherung $16\sqrt{1{,}1}\approx 16{,}781$ ist also nicht größer als $0{,}000\,062\,5$.

(Tatsächlich ist $16\sqrt{1{,}1}\approx 16{,}780\,941\,6$, der Fehler also $0{,}000\,058\,4$.)