Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

2. April 2012

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 1: Funktionen, Interpolation, Grenzwerte, Ableitung

Letzter Abgabetermin: 24. April 2012
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 1“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

Elektronische Hilfsmittel dürfen nur für die Berechnung der tatsächlichen Funktionswerte bei Aufgabe 5c) verwendet werden!

1. Spalten Sie die gebrochen-rationale Funktion $\dfrac{2x^3+7x^2-4x-1}{x^2+3x-4}$ in ein Polynom und eine echt gebrochen-rationale Funktion (Grad des Zählerpolynoms kleiner Grad des Nennerpolynoms) auf!

2. Sei $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}}$ eine reellwertige Funktion.
   a) Geben Sie den Definitionsbereich dieser Funktion an, zeigen Sie, dass sie eineindeutig ist, bestimmen Sie ihre Umkehrfunktion und deren Definitions- und Wertebereich!
   b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion ohne Verwendung von Mitteln der Differenzialrechnung auf Monotonie!

3. Von einer Funktion $y=f(x)$ liegen folgende Werte vor:

x	-1	0	1	2
y	$-2{,}24$	0	$0{,}24$	$4{,}48$

   a) Ermitteln Sie einen Näherungswert für $f(0{,}5)$ durch kubische Interpolation!
   b) Warum ist die kubische Interpolation im vorliegenden Fall nicht geeignet, wenn bekannt ist, dass die Funktion $f(x)$ monoton wächst? Wie könnte man in diesem Falle einen Näherungswert für $f(0{,}5)$ ermitteln?

4. Sei $f(x)=\dfrac{2x^2+4x-6}{x^2+x-2}$. Bestimmen Sie die Nullstellen, hebbaren Unstetigkeitsstellen (Lücken), Pole und Asymptoten dieser rationalen Funktion! Bestimmen Sie auch die (ggf. einseitigen) Grenzwerte an den Unstetigkeitsstellen!

5. Sei $f(x)=x^5-5x^4+6x^2+2$.
   a) Differenzieren Sie die Funktion!
   b) Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ in der Nähe von $x_0=1$ durch eine Gerade und geben Sie dort das Differenzial an!
   c) Bestimmen Sie damit Näherungswerte für $f(1{,}01)$ und $f(1{,}02)$ und vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den exakten Funktionswerten an diesen Stellen! Notieren Sie für diese Situationen jeweils auch das Differenzial $\mathrm{d}f$ und die tatsächliche Funktionswertänderung Δf !
   d) x sei mit einer Genauigkeit von 0,01 zu 1 bestimmt. Schätzen Sie mit Hilfe des Differenzials den Fehler bei der Bestimmung von $f(x)$ ab!

b.w.

6. Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x) = (4x^3+2x)\,(\sin 3x+2)\,\sin(3x+2)$, b) $f(x) = (x\ln x)^5$, c) $f(x) = \ln\sqrt{x\sqrt{x}}$,

d) $f(x) = \sin^2(x^2+1)+\cos^2(x^2+1)+\sin\left(x^2+1\right)^2+\cos\left(x^2+1\right)^2$, e) $f(x) = \dfrac{x\cos(a-bx)}{x^2+1}$!

Aufgabenkomplex 1: Funktionen, Interpolation, Grenzwerte, Ableitung

Letzter Abgabetermin: 24. April 2012

---

1. Spalten Sie die gebrochen-rationale Funktion $\dfrac{2x^3+7x^2-4x-1}{x^2+3x-4}$ in ein Polynom und eine echt gebrochen-rationale Funktion (Grad des Zählerpolynoms kleiner Grad des Nennerpolynoms) auf!

Lösung:

$$(2x^3+7x^2-4x-1):(x^2+3x-4)=2x+1+\frac{x+3}{x^2+3x-4}$$

$$\begin{array}{l} \underline{2x^3+6x^2-8x} \\ \quad\quad x^2+4x-1 \\ \quad\quad \underline{x^2+3x-4} \\ \quad\quad\quad\quad x+3 \end{array}$$

---

2. Sei $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}}$ eine reellwertige Funktion.

a) Geben Sie den Definitionsbereich dieser Funktion an, zeigen Sie, dass sie eineindeutig ist, bestimmen Sie ihre Umkehrfunktion und deren Definitions- und Wertebereich!

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion ohne Verwendung von Mitteln der Differenzialrechnung auf Monotonie!

Lösung:

a) $\mathrm{DB}(f)=[-3,\infty)$

$$y=\frac{2-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}} \implies y+y\sqrt{x+3}=2-\sqrt{x+3} \implies \sqrt{x+3}(y+1)=2-y \implies \sqrt{x+3}=\frac{2-y}{1+y}$$

($y=-1$ ist offensichtlich unmöglich, da dann $2-\sqrt{x+3}=-1-\sqrt{x+3}$ sein müsste.)

Es muss $\dfrac{2-y}{1+y}\geq 0$ sein, dies gilt für $\begin{cases} 2-y\geq 0,\ 1+y>0 \ \Leftrightarrow\ -1<y\leq 2 & \text{oder} \\ 2-y\leq 0,\ 1+y<0 \ \Leftrightarrow\ y\geq 2 \wedge y<1 & \text{Widerspruch} \end{cases}$

Also ist nur $-1<y\leq 2$ möglich, dann ergibt sich durch Quadrieren $x+3=\left(\dfrac{2-y}{1+y}\right)^2$ und damit $x=\dfrac{4-4y+y^2}{1+2y+y^2}-3=\dfrac{4-4y+y^2-3-6y-3y^2}{1+2y+y^2}=\dfrac{1-10y-2y^2}{1+2y+y^2}$.

Das Urbild x von y ist also eindeutig bestimmbar. Damit ist die Funktion eineindeutig und die Umkehrfunktion existiert. Nach formalem Vertauschen der Variablen erhält man

$f^{-1}(x)=\dfrac{1-10x-2x^2}{1+2x+x^2}$ mit $\mathrm{DB}(f^{-1})=(-1,2]=\mathrm{WB}(f)$, $\mathrm{WB}(f^{-1})=[-3,\infty)=\mathrm{DB}(f)$.

b) Wir untersuchen, wann $f(x)>f(y)$ gilt:

$$\frac{2-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}}>\frac{2-\sqrt{y+3}}{1+\sqrt{y+3}} \iff (2-\sqrt{x+3})(1+\sqrt{y+3})>(2-\sqrt{y+3})(1+\sqrt{x+3})$$
$$\iff 2-\sqrt{x+3}+2\sqrt{y+3}-\sqrt{x+3}\sqrt{y+3}>2-\sqrt{y+3}+2\sqrt{x+3}-\sqrt{y+3}\sqrt{x+3}$$
$$\iff 3\sqrt{y+3}>3\sqrt{x+3} \iff y>x.$$

(Bei der ersten Umformung ist beachtet, dass beide Nenner positiv sind, das beim letzten Schritt erforderliche Quadrieren ist auch eine äquivalente Umformung, da beide Seiten der Ungleichung nichtnegativ sind.)

Somit gilt $x<y \iff f(x)>f(y)$, wegen der Existenz der Umkehrfunktion ist das äquivalent zu $\tilde{x}>\tilde{y} \iff f^{-1}(\tilde{x})<f^{-1}(\tilde{y})$. Also sind die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion streng monoton fallend (und damit eineindeutig).

(Die strenge Monotonie von $f(x)$ sieht man auch sofort an der Darstellung $f(x)=\dfrac{3-1-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}}$ $=\dfrac{3}{1+\sqrt{x+3}}-1$.)

---

3. Von einer Funktion $y=f(x)$ liegen folgende Werte vor:

x	-1	0	1	2
y	$-2{,}24$	0	$0{,}24$	$4{,}48$

a) Ermitteln Sie einen Näherungswert für $f(0{,}5)$ durch kubische Interpolation!

b) Warum ist die kubische Interpolation im vorliegenden Fall nicht geeignet, wenn bekannt ist, dass die Funktion $f(x)$ monoton wächst? Wie könnte man in diesem Falle einen Näherungswert für $f(0{,}5)$ ermitteln?

Lösung:

a) Lagrange-Interpolation:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= -2{,}24\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)}+0\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1\cdot(-1)(-2)}+0{,}24\frac{(x+1)x(x-2)}{2\cdot 1\cdot(-1)}+4{,}48\frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \frac{2{,}24}{6}(x^3-3x^2+2x)-\frac{0{,}24}{2}(x^3-x^2-2x)+\frac{4{,}48}{6}(x^3-x)\\
&= \left(\frac{2{,}24}{6}-0{,}12+\frac{4{,}48}{6}\right)x^3+\left(-\frac{6{,}72}{6}+0{,}12\right)x^2+\left(\frac{4{,}48}{6}+0{,}24-\frac{4{,}48}{6}\right)x\\
&= x^3-x^2+0{,}24x
\end{aligned}$$

$$P_3(0{,}5)=0{,}5^3-0{,}5^2+0{,}24\cdot 0{,}5=\underline{\underline{-0{,}005}}$$

b) $P_3(x)=x^3-x^2+0{,}24x=0$ für $x_1=0,\ x_{2/3}=0{,}5\pm\sqrt{0{,}25-0{,}24}=0{,}5\pm\sqrt{0{,}01}=\begin{cases}0{,}6\\0{,}4\end{cases}$

hat 2 Nullstellen zwischen 0 und 1, nicht monoton.

Alternativ wäre z.B. stückweise lineare Interpolation $P_1(x)=0\dfrac{x-1}{-1}+0{,}24\dfrac{x-0}{1}=0{,}24x$,

$P_1(0{,}5)=\underline{\underline{0{,}12}}$

---

4. Sei $f(x)=\dfrac{2x^2+4x-6}{x^2+x-2}$. Bestimmen Sie die Nullstellen, hebbaren Unstetigkeitsstellen (Lücken), Pole und Asymptoten dieser rationalen Funktion! Bestimmen Sie auch die (ggf. einseitigen) Grenzwerte an den Unstetigkeitsstellen!

Lösung:

Zähler: $2x^2+4x-6=0 \iff x^2+2x-3=0 \iff x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1+3}=\begin{cases}1\\-3\end{cases}$,

$2x^2+4x-6=2(x-1)(x+3)$

Nenner: $x^2+x-2=0 \iff x_{1/2}=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{8}{4}}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$, $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

Folglich ist $f(x)$ für $x=1$ und $x=-2$ nicht definiert, ansonsten gilt

$$f(x)=\frac{2x^2+4x-6}{x^2+x-2}=\frac{2\,(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=\frac{2\,(x+3)}{(x+2)}.$$

Folglich hat die Funktion ihre einzige Nullstelle $x=-3$ und ihre einzige Polstelle bei $x=-2$, beide sind erster Ordnung.

Für $x=1$ liegt eine hebbare Unstetigkeit (Lücke) vor, es gilt $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\,(x+3)}{(x+2)}=\frac{8}{3}$.

An der Polstelle gilt $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -2-0}\frac{2\,(x+3)}{(x+2)}=-\infty$ und $\lim\limits_{x\to -2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -2+0}\frac{2\,(x+3)}{(x+2)}=\infty$, Asymptote ist die Gerade $x=-2$.

Für $x\to\pm\infty$ schließlich gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=2$, Asymptote ist somit die Gerade $y=2$.

---

5. Sei $f(x)=x^5-5x^4+6x^2+2$.

a) Differenzieren Sie die Funktion!

b) Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ in der Nähe von $x_0=1$ durch eine Gerade und geben Sie dort das Differenzial an!

c) Bestimmen Sie damit Näherungswerte für $f(1{,}01)$ und $f(1{,}02)$ und vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den exakten Funktionswerten an diesen Stellen! Notieren Sie für diese Situationen jeweils auch das Differenzial $\mathrm{d}f$ und die tatsächliche Funktionswertänderung Δf !

d) x sei mit einer Genauigkeit von 0,01 zu 1 bestimmt. Schätzen Sie mit Hilfe des Differenzials den Fehler bei der Bestimmung von $f(x)$ ab!

Lösung:

a) $f'(x)=5x^4-5\cdot 4x^3+6\cdot 2x+2\cdot 0=5x^4-20x^3+12x$

b) Approximation der Funktion $f(x)$ in der Umgebung von x_0 durch die Tangente (Taylorentwicklung bis zum linearen Glied): $f(x)\approx P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)$

Anstieg der Tangente: $f'(1)=5-20+12=-3$

$f(x)\approx P_1(x)=f(1)+f'(1)\,(x-1)=4-3\,(x-1)=-3x+7$

Differenzial: $\mathrm{d}f=f'(1)\,\Delta x=-3\,\Delta x=-3\,\mathrm{d}x$,
d.h.: Die absolute Änderung von f ist ungefähr -3 mal so groß wie die von x.

c) $f(1{,}01)\approx P_1(1{,}01)=f(1)+f'(1)\cdot 0{,}01=4-3\cdot 0{,}01=3.97$, $f(1{,}01)=3{,}9685900001$,
$\mathrm{d}f(0{,}01)=-0{,}03\approx\Delta f=-0{,}0314099999$

$f(1{,}02)\approx P_1(1{,}1)=f(1)+f'(1)\cdot 0{,}02=4-3\cdot 0{,}02=3.94$, $f(1{,}02)=3{,}9343200032$,
$\mathrm{d}f(0{,}02)=-0{,}06\approx\Delta f=-0{,}0656799968$

d) Da das Vorzeichen des Fehlers von x nicht bekannt ist, muss der Betrag des Fehlers von f abgeschätzt werden:

$|\Delta f|\approx|\mathrm{d}f|=|f'(x_0)\,\Delta x|=|f'(x_0)|\cdot|\Delta x|$

Aus $|\Delta x|\le 0{,}01$ folgt dann $|\Delta f|\lessapprox|f'(1)|\cdot 0{,}01=3\cdot 0{,}01=0{,}03$.

6. Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x)=(4x^3+2x)\,(\sin 3x+2)\,\sin(3x+2)$, b) $f(x)=(x\ln x)^5$, c) $f(x)=\ln\sqrt{x\sqrt{x}}$,

d) $f(x)=\sin^2(x^2+1)+\cos^2(x^2+1)+\sin\left(x^2+1\right)^2+\cos\left(x^2+1\right)^2$, e) $f(x)=\dfrac{x\cos(a-bx)}{x^2+1}$!

Lösung:

a) $$f'(x) = (12x^2+2)\,(\sin 3x+2)\,\sin(3x+2)+3(4x^3+2x)\,\cos 3x\,\sin(3x+2)$$
$$+\,3(4x^3+2x)\,(\sin 3x+2)\,\cos(3x+2)$$

b) $$f'(x) = 5(x\ln x)^4\left(\ln x+\frac{x}{x}\right) = 5(x\ln x)^4\,(\ln x+1)$$

c) $$f(x) = \ln\sqrt{xx^{1/2}} = \ln\sqrt{x^{3/2}} = \ln x^{3/4}, \quad f'(x) = \frac{1}{x^{3/4}}\,\frac{3}{4}x^{-1/4} = \frac{3}{4x}$$

oder $$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x}}}\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)=\frac{1}{2x\sqrt{x}}\,\frac{3}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{4x}$$

d) $$f(x) = 1+\sin\left(x^2+1\right)^2+\cos\left(x^2+1\right)^2,$$
$$f'(x)=2(x^2+1)\,2x\cos\left(x^2+1\right)^2-2(x^2+1)\,2x\sin\left(x^2+1\right)^2=4\,(x^3+x)\left(\cos\left(x^2+1\right)^2-\sin\left(x^2+1\right)^2\right)$$

e) $$f'(x) = \frac{\big(\cos(a-bx)+bx\sin(a-bx)\big)\,(x^2+1)-x\cos(a-bx)\,2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$= \frac{(1-x^2)\cos(a-bx)+bx(x^2+1)\sin(a-bx)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{(1-x^2)\cos(a-bx)}{\left(1+x^2\right)^2}+\frac{bx\sin(a-bx)}{1+x^2}$$