Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

30. Mai 2012

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 4: Vektorfunktionen, Differenzialgleichungen, Eigenwertprobleme

Letzter Abgabetermin: 19. Juni 2012
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 4“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

Sämtliche Aufgaben sind ohne elektronische Hilfsmittel zu lösen!

1. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\sin t\\ 2\sin^2 t\\ 16t^2\end{pmatrix}$ im Punkt $(1,1,\pi^2)$!

2. Gesucht ist die Kurve $y=f(x)$, die durch den Punkt $(2,16)$ geht und für die in jedem Punkt $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ das von den Koordinatenachsen und den Geraden $x=\overline{x}$ und $y=f(\overline{x})$ begrenzte Rechteck viermal so groß ist wie die von den Koordinatenachsen, der Gerade $x=\overline{x}$ und der Kurve begrenzte Fläche.
   Hinweis: Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$.

3. Lösen Sie die Differenzialgleichung $y'(x)-y(x)\cos x=\sin x\cos x$!

4. Lösen Sie die inhomogenen linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten a) $y'=-2y+3$, b) $y'=-2y+3\cos 4x$!
   Verwenden Sie dabei zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung den Lösungsansatz in Form der rechten Seite („Störgliedansatz“)!

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:
   a) $\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}4 & 37\\ -\frac{1}{2} & -3\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}8 & 9 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ -8 & -2 & 7\end{pmatrix}$!

6. Ermitteln Sie die Eigenwerte und ein vollständiges System orthonormierter Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ -2 & 4 & -10\\ 5 & -10 & 25\end{pmatrix}$!
   Führen Sie die Diagonalisierung der Matrix mithilfe dieser Vektoren rechnerisch aus!
   Hinweis: Im Falle zweier linear unabhängiger Eigenvektoren zu einem Eigenwert erhält man orthogonale Eigenvektoren zu diesem Eigenwert, indem man einen der Eigenvektoren und die zu diesem orthogonale Komponente des anderen Eigenvektors (s. z.B. Aufgabe 4b) aus Übung 7 des 1. Semesters) verwendet.