Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

25. April 2012

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 2: Differenzialrechnung

Letzter Abgabetermin: 15. Mai 2012
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 2“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

Elektronische Hilfsmittel dürfen nur bei Aufgabe 1 sowie zur zahlenmäßigen Bestimmung von Funktionswerten bei den Aufgaben 2, 3c) und 5 verwendet werden!

1. Ermitteln Sie eine Näherung für die kleinste positive Lösung der Gleichung $\tan x = x$, indem Sie auf die Gleichung $\sin x - x\cos x = 0$ das Newtonverfahren anwenden!

   Hinweis: Fertigen Sie zur Bestimmung eines geeigneten Startwertes eine Skizze an!

2. Die vertikale Bewegung eines Körpers werde durch seine Höhe h gegenüber einer Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben: $h(t) = (t^3 - 2t^2 - 3t)\mathrm{e}^{-t}$. Diskutieren Sie die Funktion und gehen Sie insbesondere auf folgende Fragen ein:
   (A) Wann befindet sich der Körper an der Wasseroberfläche?
   (B) Wie groß ist seine höchste Höhe im Zeitintervall $[0,\infty)$?
   (C) Wie tief taucht er im Zeitintervall $[0,\infty)$ maximal ein?
   (D) Wann steigt und wann fällt die Höhe im Zeitintervall $[0,\infty)$ am schnellsten?
   (E) Skizzieren Sie die Funktion!

3. Die vom Preis p abhängige Nachfragefunktion eines Produktes laute $f(p) = \dfrac{1\,000\,000}{3p+5}$.
   a) Ermitteln Sie die Preiselastiziät der Nachfrage!
   b) Wo ist die Nachfrage elastisch, proportionalelastisch bzw. unelastisch?
   c) Ermitteln Sie für einen Preis von $p = 5$ die Auswirkungen einer Preiserhöhung von 1 % mit Hilfe der Elastizität sowie exakt!
   d) Wie verhält sich die Elastizität für $p \to \infty$?

4. Seien a und b positive Parameter. Wenden Sie die l'Hospitalsche Regel auf folgende Grenzwerte an:
   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{bx}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{bx^2}$, c) $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$, d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x-a}$!

5. Wie sind die Ausmaße einer zylindrischen Konservendose zu wählen, damit sie einen Inhalt von 1 Liter hat und zu ihrer Herstellung möglichst wenig Material benötigt wird? Wie groß ist der Materialverbrauch pro Dose (ohne Verschnitt)?

6. Sei $f(x) = 16\sqrt{x}$. Berechnen Sie $f(1{,}1)$ näherungsweise durch Taylorentwicklung von $f(x)$ bis zum kubischen Glied an der Stelle $x_0 = 1$ und schätzen Sie den Fehler mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes ab!