Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

2. April 2012

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 1: Funktionen, Interpolation, Grenzwerte, Ableitung

Letzter Abgabetermin: 24. April 2012
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 1“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

Elektronische Hilfsmittel dürfen nur für die Berechnung der tatsächlichen Funktionswerte bei Aufgabe 5c) verwendet werden!

1. Spalten Sie die gebrochen-rationale Funktion $\dfrac{2x^3+7x^2-4x-1}{x^2+3x-4}$ in ein Polynom und eine echt gebrochen-rationale Funktion (Grad des Zählerpolynoms kleiner Grad des Nennerpolynoms) auf!

2. Sei $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}}$ eine reellwertige Funktion.
   a) Geben Sie den Definitionsbereich dieser Funktion an, zeigen Sie, dass sie eineindeutig ist, bestimmen Sie ihre Umkehrfunktion und deren Definitions- und Wertebereich!
   b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion ohne Verwendung von Mitteln der Differenzialrechnung auf Monotonie!

3. Von einer Funktion $y=f(x)$ liegen folgende Werte vor:

x	-1	0	1	2
y	$-2{,}24$	0	$0{,}24$	$4{,}48$

   a) Ermitteln Sie einen Näherungswert für $f(0{,}5)$ durch kubische Interpolation!
   b) Warum ist die kubische Interpolation im vorliegenden Fall nicht geeignet, wenn bekannt ist, dass die Funktion $f(x)$ monoton wächst? Wie könnte man in diesem Falle einen Näherungswert für $f(0{,}5)$ ermitteln?

4. Sei $f(x)=\dfrac{2x^2+4x-6}{x^2+x-2}$. Bestimmen Sie die Nullstellen, hebbaren Unstetigkeitsstellen (Lücken), Pole und Asymptoten dieser rationalen Funktion! Bestimmen Sie auch die (ggf. einseitigen) Grenzwerte an den Unstetigkeitsstellen!

5. Sei $f(x)=x^5-5x^4+6x^2+2$.
   a) Differenzieren Sie die Funktion!
   b) Approximieren Sie die Funktion $f(x)$ in der Nähe von $x_0=1$ durch eine Gerade und geben Sie dort das Differenzial an!
   c) Bestimmen Sie damit Näherungswerte für $f(1{,}01)$ und $f(1{,}02)$ und vergleichen Sie diese Näherungswerte mit den exakten Funktionswerten an diesen Stellen! Notieren Sie für diese Situationen jeweils auch das Differenzial $\mathrm{d}f$ und die tatsächliche Funktionswertänderung Δf !
   d) x sei mit einer Genauigkeit von 0,01 zu 1 bestimmt. Schätzen Sie mit Hilfe des Differenzials den Fehler bei der Bestimmung von $f(x)$ ab!

b.w.

6. Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x) = (4x^3+2x)\,(\sin 3x+2)\,\sin(3x+2)$, b) $f(x) = (x\ln x)^5$, c) $f(x) = \ln\sqrt{x\sqrt{x}}$,

d) $f(x) = \sin^2(x^2+1)+\cos^2(x^2+1)+\sin\left(x^2+1\right)^2+\cos\left(x^2+1\right)^2$, e) $f(x) = \dfrac{x\cos(a-bx)}{x^2+1}$!