

Aufgabenkomplex 4: Vektorfunktionen, Differentialgleichungen, Eigenwertprobleme

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 4“ kennzeichnen.

(Abgabe in Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)

1. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a)

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$$

b)

$$y' - 5y = e^{5x}$$

c)

$$\frac{y'}{2} + xy = e^{-x^2}$$

2. Bestimmen Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems $y' = Ay, y(0) = y_0$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Untersuchen Sie folgende Funktionen auf stationäre Punkte und Extremwerte sowie Sattelpunkte:

a)

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^3 - 12y$$

b)

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy - 4x + 9y$$

c)

$$f(x, y) = (x - y)^3 + 12xy$$

4. Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie die Matrix P an, die die jeweilige Matrix diagonalisiert. Geben Sie außerdem die Diagonalmatrix $P^{-1}AP$ an.

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

5. Untersuchen Sie die symmetrischen Matrizen

a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -15 & 5 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} -10 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

auf Definitheit!