

Aufgabenkomplex 3: Integralrechnung

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 3“ kennzeichnen.
(Abgabe in Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)

1. Bestimmen Sie mittels Integration durch Substitution bzw. partielle Integration

a) $\int \sqrt{x} \ln x dx$

b) $\int x \cdot \cos(2x) dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} dx$

d) $\int \sin \sqrt{x} dx$

e) $\int \frac{dx}{1+e^x}$

2. Integrieren Sie

a) $\int \frac{2x^3+3x^2-3x-6}{x^2-2} dx$

b) $\int \frac{4x-1}{x^2-5x+6} dx$

indem Sie für die zu integrierenden Funktionen eine Partialbruchzerlegung nach Linearfaktoren des Nenners in der Form $\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$ mit geeigneten Koeffizienten A und B vornehmen!

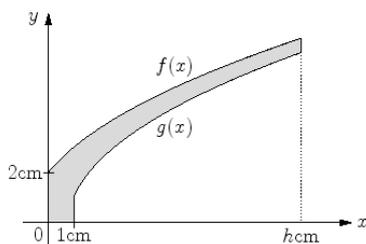
3. Für jedes $a > 0$ und $x \in [-a, a]$ sei

$$f_a(x) = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}.$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graph von f_a und der x -Achse.

(Hinweis: $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2} x + \arcsin x)$)

4. König Siegelbert möchte seiner Gattin zur Geburt von Zwillingen einen goldenen Becher voller Juwelen schenken. Er gibt seinem Hofschmied den Auftrag den Becher nach der unten gezeigten Skizze zu fertigen. Wie muss dessen Höhe h gewählt werden, damit sein Gewicht $1515.05\pi g$ beträgt und somit der Summe der beiden Geburtsgewichte entspricht?



$$f(x) = \sqrt{5x+4}, \quad x \in [0, h]$$
$$g(x) = \sqrt{5x-4}, \quad x \in [1, h]$$

Der Becher entsteht durch Rotation um die x -Achse.

Hinweis: Gold besitzt eine Dichte von $19,3 \text{ g/cm}^3$.

a)

Geben Sie den Querschnitt des Bechers, d.h. den Flächeninhalt der Schnittfläche des Bechers mit der zur x - y -Ebene parallelen Ebene, in Abhängigkeit von x an!

b)

Bestimmen Sie das Volumen des Bechers durch Integration!

5. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale!

a)

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$$

b)

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$$

c)

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

d)

$$\int_3^{\infty} \frac{4+x}{x^3} dx$$

Quellenangabe: (Aufgabe 4) Mathematik-Online-Aufgabensammlung, Uni-Stuttgart.