

Aufgabenkomplex 1: Funktionen, Interpolation, Ableitung

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 1“ kennzeichnen.
(Abgabe in Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)

1. Handelt es sich bei den folgenden Zuordnungsvorschriften um Funktionen:

- a) Bäume \rightarrow Wald,
b) Kunden \rightarrow Kundennummer,
c)
$$y = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 2 \\ x - 1, & x > 2 \end{cases},$$

d) $y = \min(0, x, x^2)$?

Wenn ja, sind die Funktionen invertierbar? Geben Sie ggf. Definitions-, Werte- und Monotoniebereiche sowie die Umkehrfunktion an!

2. Für die Größen x und y liegen folgende Werte vor:

x	2	3	6
y(x)	-10	0	10

Dies ist erfüllt von $y(x) = 20 - \frac{60}{x}$.

- a) Ermitteln Sie eine Näherung für $y(4)$ durch lineare Interpolation von $y(3)$ und $y(6)$!
b) Ermitteln Sie eine Näherung für $y(4)$ durch quadratische Interpolation aus $y(2)$, $y(3)$ und $y(6)$!

Bestimmen Sie dabei die Interpolationspolynome durch Lagrange-Interpolation! Wie könnten die Polynome alternativ bestimmt werden?

3. Sei $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} + 8$ eine reelle Funktion einer reellen Variablen.

- a) Bestimmen Sie den Definitions- und Wertebereich der Funktion $f(x)$, geben Sie die Umkehrfunktion an und bestimmen Sie deren Definitions- und Wertebereich!
b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion auf Monotonie!

Was kann aus der Monotonie beider Funktionen geschlossen werden?

4. Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $16[\lg(x + 30)]^2 - 64\lg(x + 30) + 64 = 0$

b) $\frac{6 \cdot \lg(99x+10)+2}{\lg(99x+10)-1} = 10$

c) $x^{\lg x} + 100x^{-\lg x} - 20 = 0$ Hinweis: Beachte $x^{\lg x} = (\lg x)^2$!

5. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x) = \frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{x^2}$

b) $f(x) = e^{\sin(\frac{1}{x})} \cdot \cos(ax)$

c) $f(x) = e^{\sin(\ln(ax))}$

d) $f(x) = a^{x^{a^x}}$ Hinweis: Um x^{a^x} zu differenzieren ist die Darstellung $\ln x^{a^x} = a^x \ln x$ nützlich!