Aufgabenkomplex 4: Vektorfunktionen, Differenzialgleichungen, Eigenwertprobleme

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 4" kennzeichnen.
(Abgabe in Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

1. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a)
$$y' - 2xy = x - x^3$$

b)
$$y' + y\sin x = \sin x \cos x$$

2.Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay,\ y(0) = y_0$ für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.Sind die folgende Matrizen diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie die Matrix P an, die die jeweilige Matrix diagonalisiert. Geben Sie außerdem die Diagonalmatrix $P^{-1}AP$ an.

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

4.Untersuchen Sie folgende Funktion auf stationäre Punkte und Extremwerte:

a)
$$f(x,y) = y^3 - 3x^2y + 24x + 8$$

b)
$$f(u,v) = (u-6)^2 + (u+2)v^2 + 10$$

c)
$$f(s,t) = t^4 - 4s^3t + 96s - 1!$$

5.

a)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ at+b \end{pmatrix} \quad (a,b,r \in \mathbb{R})$ eine Schraubenlinie (Helix) beschreibt!

b)

Bestimmen Sie den Tangentialvektor an diese Schraubenlinie!