

Aufgabenkomplex 2: Differentialrechnung

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 2“ kennzeichnen.

(Abgabe in Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x}, \quad \text{Hinweis: Verwenden Sie } (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}!$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot(2x)}{\cot(5x)}, \quad \text{Hinweis: Verwenden Sie } (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}!$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x+3x^2-4x^3}{(1-2x)(4-3x^2)}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}, \quad (a, b > 0)$$

2. Gegeben sei die Funktion: $f(x) = x - \cos x$

a)

Geben Sie die Newtoniterationsformel an!

b)

Welche Nullstellen ergeben sich bei der Verwendung des Newtonverfahrens, wenn als Startwert $x_0 = 1$ und $x_0 = -0,1$ gewählt werden?

c)

Leiten Sie aus b) ab, wie Startwerte sinnvoll gewählt werden können und welche Auswirkungen die Wahl der Startwerte auf die Lösung hat!

3. Bestimmen Sie für die Funktionen

a)

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

b)

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3x+1}$$

die ersten vier Terme ihrer Taylor-Entwicklung zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

4. Geben Sie alle Extrempunkte und Wendepunkte folgender Funktionen an:

a)

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

b)

$$f(x) = \frac{\sin x}{\tan x}, \quad \text{im Intervall } [-2\pi, 2\pi]$$

5. Sei $f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^2 + 4x + 2$.

a)

Ermitteln Sie die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$!

b)

Demonstrieren Sie an einem selbstgewählten Beispiel, dass für Funktionen f, g und h die Beziehung $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ gilt!