Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik 13. Juli 2010

Höhere Mathematik I.2

Übung 22: Gradient und Richtungsableitung; Extremwertaufgaben für Funktionen mehrerer Veränderlicher

1. Durch ein Gelände mit der Höhe $h(x,y) = \dfrac{1000+x+y+\sqrt{xy+76}}{10}$ werde längs der Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Straße gebaut. Bestimmen Sie den Anstieg der Straße im Geländepunkt $(x,y) = (4,6)$!

2. Sei $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
   a) Zeichnen Sie das Niveaulinienbild!
   b) Um was für eine Fläche handelt es sich bei $z = f(x,y)$?
   c) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$!
   d) Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $f(x,y)$ im Punkt $(3,4)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$!
   e) Ermitteln Sie mithilfe der Richtungsableitung, wie sich $f(x,y)$ näherungsweise ändert, wenn x von 3 auf 3.01 und y von 4 auf 4.024 wächst? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der tatsächlichen Änderung!
   f) In welche Richtung wächst $f(x,y)$ am stärksten? Argumentieren Sie sowohl mit dem Gradienten als auch mit der geometrischen Bedeutung der Funktion!

3. Bestimmen Sie alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und untersuchen Sie mittels der zweiten partiellen Ableitungen, ob Extrema vorliegen und von welchem Typ diese sind:
   a) $f(x,y) = 3 - x^2 + xy - 3y^2 + 7x + 2y$,
   b) $f(x,y) = (x+y)^2$!

4. Bestimmen Sie die Sattelpunkte und Extremstellen der Funktion $f(x,y) = 4xy + 6x + 2y + 3$!

5. Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - xy^2 + 12x + 2z$ auf Extremwerte!

Übung 22: Gradient und Richtungsableitung; Extremwertaufgaben für Funktionen mehrerer Veränderlicher

---

1. Durch ein Gelände mit der Höhe $h(x,y) = \dfrac{1000+x+y+\sqrt{xy+76}}{10}$ werde längs der Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Straße gebaut. Bestimmen Sie den Anstieg der Straße im Geländepunkt $(x,y) = (4,6)$!

Lösung:

Der Anstieg ist die Richtungsableitung von $h(x,y)$ im Punkt $(4,6)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Richtungsableitung (Maß für die Änderung der Funktion f in Richtung $\vec{v}$):
Ist die Funktion f im Punkt $\vec{x}$ total differenzierbar, so existieren alle Richtungsableitungen. Für $\|\vec{v}\| = 1$ gilt $\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{v}} = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v}$. Hat der Vektor $\vec{v}$ eine andere Länge, so muss er erst normiert werden. Es gilt dann $\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{v}} = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v}_n = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v}$.

$$\nabla h = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{y}{2\sqrt{xy+76}} \\ 1+\dfrac{x}{2\sqrt{xy+76}} \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \text{normiert: } \vec{v}_n = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{v}} = \nabla h \cdot \vec{v}_n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{y}{2\sqrt{xy+76}} \\ 1+\dfrac{x}{2\sqrt{xy+76}} \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{6}{20} \\ 1+\dfrac{4}{20} \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{39+48}{500} = \underline{\underline{\frac{87}{500} = 0.174}}$$

Somit beträgt der Anstieg 17,4 %. (Ein Anstieg von $1 = 100\,\%$ entspricht einem Steigungswinkel von $45°$.)

In Richtung $\vec{v}$ gilt $\Delta h \approx \dfrac{\partial h}{\partial \vec{v}} \|\Delta \vec{x}\|$. Pro Meter Basislänge beträgt der Anstieg ca. 17,4 cm, d.h. für 1 m ca. 17,4 cm, für 2 m ca. 34,8 cm und für 10 m ca. 1,74 m.

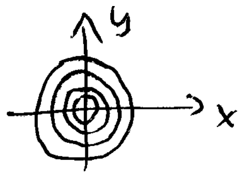
---

2. Sei $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

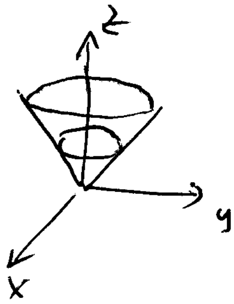
a) Zeichnen Sie das Niveaulinienbild!
b) Um was für eine Fläche handelt es sich bei $z = f(x,y)$?
c) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$!
d) Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $f(x,y)$ im Punkt $(3,4)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$!
e) Ermitteln Sie mithilfe der Richtungsableitung, wie sich $f(x,y)$ näherungsweise ändert, wenn x von 3 auf 3.01 und y von 4 auf 4.024 wächst? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der tatsächlichen Änderung!
f) In welche Richtung wächst $f(x,y)$ am stärksten? Argumentieren Sie sowohl mit dem Gradienten als auch mit der geometrischen Bedeutung der Funktion!

Lösung:

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = C,\ C \geq 0,\quad x^2+y^2 = C^2$:
Kreis mit Radius C um den Koordinatenursprung



b) vgl. Aufgabe 2 aus Übung 12, dort $x^2+y^2=z^2$: Doppelkegel,
hier $\sqrt{x^2+y^2}=z$, d.h. nur $z \geq 0$: Kegel



c) $$\operatorname{grad} f = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

d) $$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix},\ \vec{v}_n = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix},\quad \frac{f(\vec{x})}{\partial \vec{v}} = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v}_n = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{5x+12y}{13\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f(3,4)}{\partial \vec{v}} = \frac{15+48}{13 \cdot 5} = \frac{63}{65} \approx 0.96923$$

e) In Richtung $\vec{v}$ gilt $\dfrac{\Delta f}{\|\Delta \vec{x}\|} \approx \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}},\ \Delta f \approx \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}} \|\Delta \vec{x}\|$.

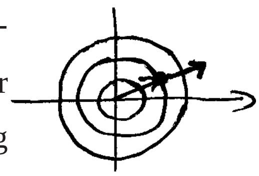
$\Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.024 \end{pmatrix} = 0.002 \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ zeigt in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\|\Delta \vec{x}\| = 0.002 \cdot 13 = 0.026$,

$\Delta f \approx \dfrac{\partial f(3,4)}{\partial \vec{v}} \|\Delta \vec{x}\| = \dfrac{63}{65} 0.026 = \underline{\underline{0.0252}}$

Tatsächliche Änderung: $\Delta f = f(3.01, 4.024) - f(3.4) \approx 5.0252041 - 5 = 0.0252041$

f) Maß für Änderung in Richtung $\vec{v}$: Richtungsableitung
$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f \cdot \vec{v}_n = \|\nabla f\| \, \|\vec{v}_n\| \cos\sphericalangle(\nabla f, \vec{v}) = \|\nabla f\| \cos\sphericalangle(\nabla f, \vec{v})$ (wegen $\|\vec{v}_n\| = 1$), also
stärkster Anstieg für $\cos\sphericalangle(\nabla f, \vec{v}) = 1,\ \sphericalangle(\nabla f, \vec{v}) = 0$, d.h. in Richtung des Gradienten,
stärkster Fall für $\cos\sphericalangle(\nabla f, \vec{v}) = -1,\ \sphericalangle(\nabla f, \vec{v}) = \pi$, d.h. entgegen dem Gradienten.

$f(x,y)$ ändert sich also in Richtung des Gradienten $\nabla f = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$, also in radialer Richtung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ am stärksten. Das ist plausibel: $f(x,y)$ ist der Abstand vom Koordinatenursprung, der ändert sich in radialer Richtung am stärksten.



3. Bestimmen Sie alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und untersuchen Sie mittels der zweiten partiellen Ableitungen, ob Extrema vorliegen und von welchem Typ diese sind:

a) $f(x,y) = 3 - x^2 + xy - 3y^2 + 7x + 2y$,

b) $f(x,y) = (x+y)^2$!

Lösung:

Extremwertaufgaben	$f(x)$	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
notwendige Bedingung (extremwertverdächtig, stationärer Punkt)	$f'(x) = 0$	$\nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \cdot\,\cdot \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$
hinreichende Bedingung	$f''(x) \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{Min.} \\ < 0 \rightarrow \text{Max.} \end{cases}$	$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$ pos. def. $\longrightarrow$ Min. neg. def. $\longrightarrow$ Max. indefinit $\longrightarrow$ kein Extr. (Sattelpunkt)

Untersuchung der Definitheit symmetrischer Matrizen ($\boldsymbol{H}_f$ ist symmetrisch.)

Definitheitsuntersuchung mit Eigenwerten:

	alle EW > 0:	positiv definit,
	alle EW < 0:	negativ definit,
	EW unterschiedl. Vz.:	indefinit.

Definitheitsuntersuchung mit Kriterium von Sylvester:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

alle Hauptunterdeterminanten („Hauptminoren“) > 0, d.h.
Vz. der Hauptminoren $++++++\cdots \iff$ positiv definit

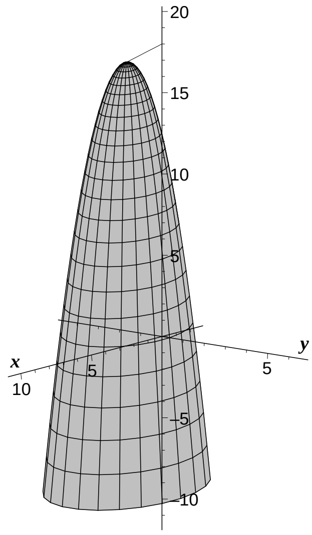
Vz. der Hauptminoren $-+-+-+\cdots \iff$ negativ definit
(mit $-$ beginnend!)

Für $n=1$ reduziert sich $\boldsymbol{H}_f$ positiv definit nach Kriterium von Sylvester auf $f_{x_1x_1} > 0$.

Für $n=2$ muss sowohl bei positiver als auch bei negativer Definitheit der 2. Hauptminor positiv sein: $\begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix} > 0$. Damit kann das Kriterium wie folgt gefasst werden:

$$\det \boldsymbol{H}_f \begin{cases} > 0 & \rightarrow \text{Extremum} \begin{cases} f_{x_1x_1} > 0 \rightarrow \text{Min.} \\ f_{x_1x_1} < 0 \rightarrow \text{Max.} \end{cases} \\ < 0 & \rightarrow \text{kein Extremum (Sattelpunkt)} \\ = 0 & \text{so nicht entscheidbar} \end{cases}$$

a) $\nabla f = \begin{pmatrix} -2x+\ y+7 \\ x-6y+2 \end{pmatrix} = \vec{0}$



$$\begin{aligned} f_x &= -2x + \quad y + \ 7 = 0 \qquad |+ \\ f_y &= \quad x - \ 6y + \ 2 = 0 \quad |\cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 12y + \ 4 &= 0 \qquad |+ \\ -11y + 11 &= 0 \quad \Longrightarrow y=1,\ x=4 \text{ (stat. Punkt)} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$,

$\det \boldsymbol{H}_f = (-2)(-6) - 1 = 11 > 0 \implies$ Extremwert,

$f_{xx} = -2 < 0 \implies$ Maximum

oder:

$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 12 + 8\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 + 8\lambda + 11 = 0,$

$\lambda_{1/2} = -4 \pm \sqrt{5}$, beide EW $< 0 \implies$ neg. def. $\implies$ Maximum

Also gibt es nur einen Extemwert, das Maximum $f(4,1) = 18$.

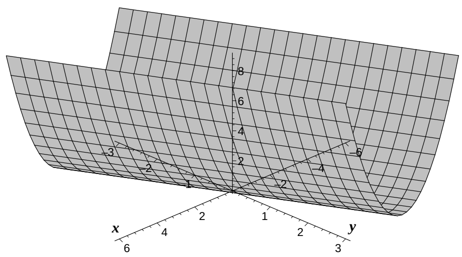
b) $\nabla f = \begin{pmatrix} 2(x+y) \\ 2(x+y) \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\left.\begin{aligned} f_x = 2(x+y) = 0 \\ f_y = 2(x+y) = 0 \end{aligned}\right\} y = -x, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$ sind stationäre Punkte.

$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \det \boldsymbol{H}_f = 2\cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0 \implies$ so nicht entscheidbar

oder: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda-4) = 0,\ \ \lambda_{1/2} = 0; 4,$
ein Eigenwert 0 $\implies$ so nicht entscheidbar

Es gilt aber immer $f(x,y) = (x+y)^2 \geq 0$ und für die stationären Punkte $f(x,-x) = 0$. Also sind alle Punkte der Gerade $y = -x$ Minima.



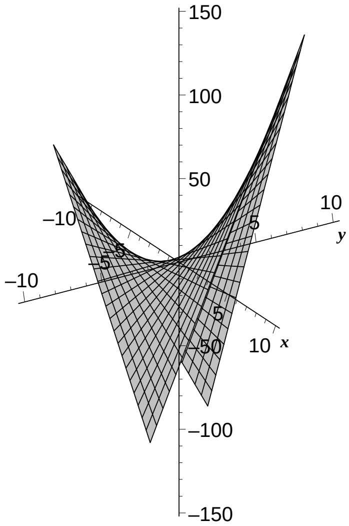
---

4. Bestimmen Sie die Sattelpunkte und Extremstellen der Funktion $f(x,y) = 4xy + 6x + 2y + 3$!

Lösung:

$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y+6 \\ 4x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $\left.\begin{aligned} 4y+6=0 \longrightarrow y = -3/2 \\ 4x+2=0 \longrightarrow x=-1/2 \end{aligned}\right\}$ einziger stationärer Punkt

$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\det \boldsymbol{H}_f = -16 < 0 \implies$ kein Extremum, also $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ Sattelpunkt



---

5. Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - xy^2 + 12x + 2z$ auf Extremwerte!

Lösung:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - y^2 + 12 \\ 4y - 2xy \\ 2z + 2 \end{pmatrix} = \vec{0} \implies \begin{array}{l} 4y - 2xy = 2y(2-x) = 0 \implies y = 0 \ \textbf{oder} \ x = 2 \\ z = -1 \end{array}$$

Fall $y=0$: erste Gleichung: $2x+12=0$, $x=-6$, d.h. stationärer Punkt $(-6,0,-1)$

Fall $x=2$: erste Gleichung: $4-y^2+12=0$, $y^2=16$, d.h. stationäre Punkte $(2,\pm 4,-1)$

Für die somit gefundenen 3 stationären Punkte wird nun die hinreichende Extremwertbedingung untersucht:

$$\boldsymbol{H}_f = \begin{pmatrix} 2 & -2y & 0 \\ -2y & 4-2x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_f(-6,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hauptminoren $2>0$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 16 \end{vmatrix} = 32 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 64 > 0$: alle $>0 \implies \boldsymbol{H}_f$ pos.def. $\implies$ $f(-6,0,-1) = -37$ lokales Minimum

oder mit Eigenwerten: $\det(\boldsymbol{H}_f - \lambda\boldsymbol{E}) = (2-\lambda)(16-\lambda)(2-\lambda) = 0$, $\lambda_{1/2} = 2$, $\lambda_3 = 16$,
alle EW positiv $\implies \boldsymbol{H}_f$ positiv definit, $f(-6,0,-1) = -37$ lokales Minimum

$$\boldsymbol{H}_f(2,\pm 4,-1) = \begin{pmatrix} 2 & \mp 8 & 0 \\ \mp 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hauptminoren $2>0$, $\begin{vmatrix} 2 & \mp 8 \\ \mp 8 & 0 \end{vmatrix} = -64 < 0$, $\begin{vmatrix} 2 & \mp 8 & 0 \\ \mp 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -128 < 0$

Eine symmetrische Matrix ist unter anderem dann indefinit, wenn ein Hauptminor gerader Ordnung negativ ist und/oder wenn es Hauptminoren ungerader Ordnung mit entgegengesetztem Vorzeichen gibt. Also ist die Hessematrix hier indefinit, so dass $f(2,\pm 4,-1) = 27$ Sattelpunkte sind.

oder mit Eigenwerten: $\det(\boldsymbol{H}_f - \lambda\boldsymbol{E}) = (2-\lambda)[-\lambda(2-\lambda) - 64] = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 64) = 0$,
$\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2/3} = 1 \pm \sqrt{65}$, EW unterschiedl. Vz. $\implies \boldsymbol{H}_f$ indefinit, $f(2,\pm 4,-1) = 27$ Sattelpunkte