

Höhere Mathematik I.2

**Übung 22: Gradient und Richtungsableitung;
Extremwertaufgaben für Funktionen mehrerer Veränderlicher**

1. Durch ein Gelände mit der Höhe $h(x,y) = \frac{1000+x+y+\sqrt{xy+76}}{10}$ werde längs der Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Straße gebaut. Bestimmen Sie den Anstieg der Straße im Geländepunkt $(x,y) = (4,6)$!
2. Sei $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
 - a) Zeichnen Sie das Niveaulinienbild!
 - b) Um was für eine Fläche handelt es sich bei $z = f(x,y)$?
 - c) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$!
 - d) Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $f(x,y)$ im Punkt $(3,4)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$!
 - e) Ermitteln Sie mithilfe der Richtungsableitung, wie sich $f(x,y)$ näherungsweise ändert, wenn x von 3 auf 3.01 und y von 4 auf 4.024 wächst? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der tatsächlichen Änderung!
 - f) In welche Richtung wächst $f(x,y)$ am stärksten? Argumentieren Sie sowohl mit dem Gradienten als auch mit der geometrischen Bedeutung der Funktion!
3. Bestimmen Sie alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und untersuchen Sie mittels der zweiten partiellen Ableitungen, ob Extrema vorliegen und von welchem Typ diese sind:
 - a) $f(x,y) = 3 - x^2 + xy - 3y^2 + 7x + 2y$,
 - b) $f(x,y) = (x+y)^2$!
4. Bestimmen Sie die Sattelpunkte und Extremstellen der Funktion $f(x,y) = 4xy + 6x + 2y + 3$!
5. Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - xy^2 + 12x + 2z$ auf Extremwerte!