Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

12. Juli 2010

Höhere Mathematik I.2

Übung 21: Differenziation von Funktionen mehrerer Veränderlicher

1. Ein Produktionsergebnis P hänge von den Faktoren x und y (z.B. Arbeitszeit, Kapitaleinsatz) nach der Formel $P(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{xy^2}$ ab.
   a) Wie ist der Definitionsbereich sinnvollerweise zu wählen? Welcher Wertebereich ergibt sich?
   b) Es sei vorgegeben, dass das Produktionsergebnis C erzielt werden muss. Lässt sich der damit implizit gegebene Zusammenhang zwischen x und y explizit nach x bzw. y auflösen?
   c) Mit welchen Kombinationen der Produktionsfaktoren x und y lassen sich die Ergebnisse $P = 1$, $P = 2$, $P = 3$ bzw. $P = 4$ erreichen?
   d) Stellen Sie die Funktion grafisch durch Niveaulinien dar!
   e) Stellen Sie die Funktion als Fläche („Gebirge“ über der x-y-Ebene) dar!

2. Ein Produkt wird in unterschiedlichen Qualitäten von 2 Herstellern produziert. Hersteller 1 muss für die Herstellung von einem Stück 4 €, Hersteller 2 muss 5 € aufwenden. Die von den Preisen p_1 für ein Stück des Herstellers 1 und p_2 für ein Stück des Herstellers 2 abhängige Nachfrage betrage $N_1(p_1, p_2) = 40\,000 - 20\,000\,p_1 + 10\,000\,p_2$ Stück für das Produkt des Herstellers 1 und $N_2(p_1, p_2) = 60\,000 + 10\,000\,p_1 - 10\,000\,p_2$ Stück für das Produkt des Herstellers 2. Berechnen Sie die Preise und die Nachfrage nach den Produkten der beiden Hersteller, die sich bei Marktgleichgewicht einstellen!

3. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie Gradient und Hessematrix folgender Funktionen:
   a) $f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_1^4 x_2^2$ an der Stelle $x_1 = 1,\ x_2 = 2$,
   b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 e^{x_2} + \arctan x_3$,
   c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x}$!

4. Sei $g(t) = f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$. Welche Konsequenzen hätte es, wenn in der Kettenregel
$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \nabla f(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$$
statt „∂“ einfach „d“ geschrieben und mit den partiellen Differenzialquotienten wie mit Brüchen gerechnet würde, wie das bei gewöhnlichen Differenzialquotienten zulässig ist?

5. Sei $z = 3x^2 + 2xy$ mit $x = \sin t$ und $y = \cos t$. Berechnen Sie $\dot{z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$
   a) mit der Kettenregel,
   b) durch Einsetzen!