Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik 25. Mai 2010

Höhere Mathematik I.2

Übung 11: Bestimmte und uneigentliche Integrale

1. Die Herstellungskosten für ein Produkt werden für die 12 Monate eines Jahres mit $K_m = 100\left(10+m+2m\mathrm{e}^{-m/12}\right)$, $m = 1,2,\ldots,12$ prognostiziert. Durch Addition erhält man als Jahressumme $\sum\limits_{m=1}^{12} K_m \approx 27834.94$.
   a) Die Kostenprognose für das Jahr soll mit Hilfe des Integrals $\int\limits_0^{12} K(t)\mathrm{d}t$ erfolgen, wobei $K(t) = 100\left(10+t+2t\mathrm{e}^{-t/12}\right)$ ist. Berechnen Sie dieses Integral!
   b) Stellen Sie das Integral und die Summe als Flächen dar!
   c) Warum wird bei der Prognose mit dem Integral die Jahressumme unterschätzt? Wie könnte diese für die gegebene Funktion besser mit einem Integral prognostiziert werden?

2. Ein 100 cm langer Stab habe eine über seine Länge variierende Dichte, diese betrage $30+\dfrac{\sqrt{x}\,(100-x)}{20}\,\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}}$, $0\le x\le 100$. Berechnen Sie seine Masse!

3. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:
   a) $\displaystyle\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_8^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$!

4. Welchen Wert haben die Integrale a) $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$ und b) $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^2}}$?

5. Die Lebensdauer eines Bauteils in Jahren sei eine exponentialverteilte Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}, t\ge 0$ mit einem positiven Parameter λ. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer des Bauteils zwischen a und b Jahren beträgt, ist dann gleich $\int\limits_a^b p(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.
   a) Überzeugen Sie sich davon, dass mit der verwendeten Wahrscheinlichkeitsdichte gesichert ist, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil irgendwann ausfällt, gleich 1 ist!
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält das Bauteil mindestens 5 Jahre, mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt es zuvor aus?
   c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E = \int\limits_0^\infty t\,p(t)\,\mathrm{d}t$ sowie die Standardabweichung $\sigma=\sqrt{\int\limits_0^\infty (t-E)^2\,p(t)\,\mathrm{d}t}$ der Lebensdauer!