

Höhere Mathematik I.2

Übung 10: Unbestimmte und bestimmte Integrale

1. Berechnen Sie $\int e^x \cos x dx$, indem Sie das Integral zunächst durch partielle Integration auf $\int e^x \sin x dx$ und letzteres Integral wieder auf $\int e^x \cos x dx$ zurückführen!

2. Berechnen Sie die Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{\cos x + 3}$ mit Hilfe der Substitution $t = \tan \frac{x}{2}$,
 $\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$! Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch eine Probe!

Hinweis für die Probe: $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$

3. Berechnen Sie die Stammfunktionen von a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 25}$ und b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 25}$!

Nehmen Sie dafür im Falle b) eine „Partialbruchzerlegung“ vor, d.h., bestimmen Sie Konstanten A und B so, dass $\frac{1}{x^2 - 25} = \frac{1}{(x-5)(x+5)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5}$ gilt!

Überprüfen Sie in beiden Fällen Ihre Ergebnisse durch eine Probe!

4. Ermitteln Sie folgende Integrale:

a) $\int_{-2}^3 2x^2 dx$, b) $\int_{-1}^1 |x| dx$, c) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1}$, d) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 9}$, e) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin x| dx$!

5. a) Berechnen Sie $\int_0^4 (x-1)(x-2)(x-3) dx$!

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von $y = (x-1)(x-2)(x-3)$, $x = 0$, $x = 4$ und $y = 0$ begrenzt wird!

6. Berechnen Sie den Inhalt der von den Kurven $y = \sin \frac{\pi}{2} x$ und $y = -x^3 + 6x^2 - 8x$ begrenzten endlichen Fläche!