Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

4. Mai 2010

Höhere Mathematik I.2

Übung 7: Extremwertaufgaben

1. Ein Mann befindet sich in einem Ruderboot vor einer geradlinigen Küste. Der Abstand zum nächsten Küstenpunkt K beträgt 8 km. Der Mann möchte zum Küstenpunkt Z, der vom Punkt K genau 10 km entfernt liegt. Der Mann rudert mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h zu einem Küstenpunkt M zwischen K und Z und läuft anschließend mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h zum Punkt Z. Welchen Küstenpunkt muss der Mann ansteuern, um sein Ziel in kürzester Zeit zu erreichen?

2. Betrachtet werden Quader mit den Kantenlängen a, b und c, deren Volumen $1\,\mathrm{m}^3$ beträgt und bei denen die Kanten a und b im Verhältnis 1 : 3 stehen. Wie müssen die Kantenlängen gewählt werden, damit der Oberflächeninhalt minimal wird? Wie groß ist die minimale Oberfläche?

3. Ein Unternehmen erzielt beim Absatz von x Mengeneinheiten einer Ware einen Gewinn von $G(x) = 100\sqrt{x} - 3x$. Danach wird eine Mengensteuer von $S(x) = rx$ erhoben. Bestimmen Sie denjenigen Steuersatz r, bei dem der Staat höchste Steuereinnahmen hat, wenn man nettogewinnorientiertes Verhalten des Unternehmers unterstellt!

4. Sei $a, b, c > 0$. Diskutieren Sie den Verlauf der logistischen Funktion $y = \dfrac{a}{b + \mathrm{e}^{-ct}}$ und skizzieren Sie sie! Welche Sachverhalte könnten mit ihr beschrieben werden?

5. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden 1000 Bakterien in eine Nährlösung gegeben. Die Zahl der Bakterien entwickelt sich nach der Formel $f(t) = \dfrac{G}{1 + A\mathrm{e}^{-0,2t}}$, wobei die Sättigungsgrenze bei 20 000 Bakterien liegt.
   a) Bestimmen Sie die Parameter G und A !
   b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(t)$ monoton wachsend ist!
   c) Zu welchem Zeitpunkt beträgt die Zahl der Bakterien 10 000 ? Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt die Wachstumsgeschwindigkeit der Population?
   d) Zu welchem Zeitpunkt wächst die Population am stärksten?