

Höhere Mathematik I.2

Übung 4: Ableitung, Differenzial und Tangente

- Ein Fahrzeug bewegt sich nach $s(t) = 20 + 10t + 100t^2 - 30t^3$. Dabei wird der Weg s in Kilometern, die Zeit t in Stunden gemessen.
 - Differenzieren Sie die Funktion $s(t)$! Welchen Weg hat das Fahrzeug nach einer Stunde, d.h. zum Zeitpunkt $t=1$, zurückgelegt, mit welcher Geschwindigkeit fährt es da?
 - Geben Sie das Differenzial von s bezüglich t zum Zeitpunkt $t=1$ an! Welche Strecke würde das Fahrzeug in 1, 6, 30 bzw. 60 Minuten zurücklegen, wenn es die Geschwindigkeit, mit der es nach einer Stunde fährt, beibehalten würde?
 - Vergleichen Sie die in b) berechneten Werte des Differenzials mit den tatsächlichen Wegänderungen!
 - Die Zeit t sei mit einer Genauigkeit von 5 Minuten zu $t=1$ bestimmt. Schätzen Sie mithilfe des Differenzials den Fehler bei der Bestimmung von $s(t)$ ab!
 - Approximieren Sie die Funktion $s(t)$ in der Nähe von $t=1$ durch eine Gerade! Welchen Weg hätte das Fahrzeug nach 61, 66, 90 bzw. 120 Minuten zurückgelegt, wenn es die Geschwindigkeit, mit der es nach einer Stunde fährt, beibehalten würde? Vergleichen Sie die Werte mit dem tatsächlich zurückgelegten Weg!
- Für die Produktion von $x \leq 2000$ Einheiten einer Ware laute die Gesamtkostenfunktion $K(x) = 1500 + 5x - 0.001x^2$.
 - Ermitteln Sie die durchschnittlichen Kosten pro Einheit, die bei der Produktion von x Einheiten entstehen (Durchschnittskostenfunktion) sowie die Grenzkostenfunktion!
 - Bestimmen Sie für $x=1000$ und $x=1900$ jeweils die Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkosten sowie die tatsächlichen Mehrkosten für die Produktion einer zusätzlichen (d.h. der 1001. bzw. 1901.) Einheit!
 - Approximieren Sie $K(x)$ in der Nähe von $x_0=1900$ durch eine Gerade und geben Sie das Differenzial an!
 - Bestimmen Sie mit Hilfe des Differenzials näherungsweise die Kosten für die Herstellung zweier zusätzlicher Einheiten, wenn bereits 1900 Einheiten produziert sind, und vergleichen Sie das Ergebnis mit den tatsächlichen Mehrkosten!
- Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$ im Punkt $x=\pi$ und skizzieren Sie $f(x) = \sqrt{1+\cos x}$!
Hinweis: $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$
- § 32a Abs. 1 des Einkommensteuergesetzes (EStG) in der nach § 52 Abs. 41 dieses Gesetzes ab dem Veranlagungszeitraum 2010 anzuwendenden Fassung bestimmt den Einkommensteuertarif wie folgt:
Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§32b, 32d, 34, 34a, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen
 - bis 8 004 Euro (Grundfreibetrag): 0;
 - von 8 005 Euro bis 13 469 Euro: $(912,17 \cdot y + 1 400) \cdot y$;
 - von 13 470 Euro bis 52 881 Euro: $(228,74 \cdot z + 2 397) \cdot z + 1 038$;
 - von 52 882 Euro bis 250 730 Euro: $0,42 \cdot x - 8 172$;
 - von 250 731 Euro an: $0,45 \cdot x - 15 694$.

„y“ ist ein Zehntausendstel des 8 004 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „z“ ist ein Zehntausendstel des 13 469 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „x“ ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu steuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Um differenzieren zu können, soll hier von den Rundungsvorschriften abgesehen werden.

- a) Ermitteln Sie den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit vom zu versteuernden Einkommen (im Folgenden Einkommen)!
- b) Ermitteln Sie für ein Einkommen von 23 469 € die zu entrichtende Steuer, ihren prozentualen Anteil am Einkommen, den Grenzsteuersatz sowie die Steuerverminderung, die durch zusätzliche Werbungskosten von 100 € erreicht wird!
- c) Ein Steuerpflichtiger hat durch den Kauf von Fachliteratur zusätzliche Werbungskosten von 200 €. Schätzen Sie für Einkommen von 10 000, 100 000 und 300 000 € mit Hilfe des Grenzsteuersatzes ab, um wieviel sich dadurch seine Einkommensteuer vermindert! Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der tatsächlichen Steuerverminderung!
- d) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente für $x=52\,881$ an die für den Bereich 3. gegebene Parabel! Kommentieren Sie das Ergebnis!