Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

22. Juni 2010

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 5: Hauptachsentransformation, Differenzialgleichungssysteme, Lineare Optimierungsaufgaben

Letzter Abgabetermin: 9. Juli 2010
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 5“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Führen Sie für die Kurve $4x^2+4xy+y^2+8\sqrt{5}x-6\sqrt{5}y=0$ die Hauptachsentransformation durch! Um was für eine Kurve handelt es sich? Stellen Sie die Kurve im x-y-System grafisch dar!

2. Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem
$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + y - 2\\ \dot{y} &= x - 3y + z + 1\\ \dot{z} &= 13x - 12y + 6z - 1 \quad !\end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $z(x_1,x_2)=-x_1+x_2+4$ für solche x_1 und x_2, die die Bedingungen $2x_1-2x_2\geq 5$, $-x_1+4x_2\leq -1$, $x_1\geq 2$ und $x_2\geq -1$ erfüllen, jeweils auf grafischem Wege und mit dem Simplexverfahren! Zeichnen Sie die bei dem Simplexalgorithmus durchlaufenen Basislösungen in die Skizze der grafischen Lösung ein. Für welche Argumente werden die Optima erreicht?

4. In einer Kompostanlage werden 2 Sorten Pflanzsubstrat hergestellt. Für die Herstellung von 1 hl Substrat Sorte A werden 40 l Gartenerde, 40 l Füllstoffe und 20 l Kompost, für 1 hl Substrat Sorte B werden 20 l Gartenerde, 40 l Füllstoffe und 40 l Kompost benötigt. Pro Hektoliter Substrat werden bei der Sorte A 3 € und bei der Sorte B 5 € erlöst. Es stehen **höchstens** je 800 hl Gartenerde und Füllstoffe zur Verfügung, sollen aber **mindestens** 880 hl Kompost verwendet werden. Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Erlös maximiert werden.

   a) Stellen Sie das mathematische Modell auf!
   b) Wenden Sie das grafische Lösungsverfahren auf das Modell an! Welche Schlussfolgerung ergibt sich?
   c) Wenden Sie das Simplexverfahren auf das Modell an!

5. Ein Eisverkäufer verkauft Eisportionen „Vanilletraum“ mit 3 Kugeln Vanille- und 1 Kugel Schokoeis sowie „Schokotraum“ mit 1 Kugel Vanille- und 3 Kugeln Schokoeis. Er erzielt pro Portion Vanilletraum einen Gewinn von 3 Geldeinheiten und pro Portion Schokotraum einen Gewinn von 2 Geldeinheiten. Zur Verfügung stehen 630 Kugeln Vanille- und 450 Kugeln Schokoeis. Wie viele Portionen der beiden Sorten müssen verkauft werden, um den in dieser Situation maximal möglichen Gewinn zu erreichen? Stellen Sie das mathematische Modell hierzu auf und lösen Sie es mit dem Simplexverfahren!

Aufgabenkomplex 5: Hauptachsentransformation, Differenzialgleichungssysteme, Lineare Optimierungsaufgaben

Letzter Abgabetermin: 9. Juli 2010

---

1. Führen Sie für die Kurve $4x^2+4xy+y^2+8\sqrt{5}x-6\sqrt{5}y=0$ die Hauptachsentransformation durch! Um was für eine Kurve handelt es sich? Stellen Sie die Kurve im x-y-System grafisch dar!

Lösung:

$$4x^2+4xy+y^2+8\sqrt{5}x-6\sqrt{5}y=(x\quad y)\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(8\sqrt{5}\quad -6\sqrt{5})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(1-\lambda)-4=4-5\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-5\lambda=0,\ \ \lambda_1=5,\ \lambda_2=0$$

EV zu EW $\lambda_1=5$: $\begin{matrix}-1&2\\2&-4\end{matrix}$ EV $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

EV zu EW $\lambda_2=0$: $\begin{matrix}4&2\\2&1\end{matrix}$ EV $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, normiert $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

Koordinatentransformation: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{V}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$

$$\underbrace{\frac{1}{5}(\xi\quad\eta)\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix}25&0\\0&0\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\underbrace{\underbrace{(8\sqrt{5}\quad -6\sqrt{5})\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}}_{(8\quad -6)\begin{pmatrix}2&-1\\1&2\end{pmatrix}}}_{(10\quad -20)}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=0$$

$$(\xi\quad\eta)\underbrace{\begin{pmatrix}5&0\\0&0\end{pmatrix}}_{\substack{\text{ohnehin klar:}\\\text{Diag.matrix aus EW}}}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+(10\quad -20)\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=0$$

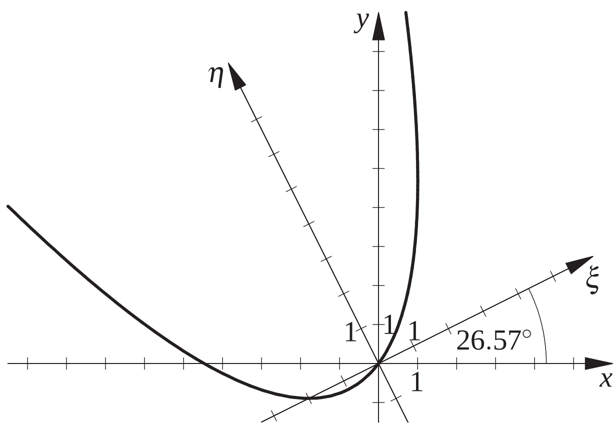
$5\xi^2+10\xi-20\eta=0,\ \ \xi^2+2\xi-4\eta=0,\ \ \underline{\underline{\eta=\frac{1}{4}(\xi+1)^2-\frac{1}{4}}}$: Parabel mit Scheitel in $\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$

Für die für die Koordinatentransformation verwendete orthogonale Matrix $\boldsymbol{V}$ gilt $\det\boldsymbol{V}=1$, so dass eine Drehung realisiert wurde.

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow\quad \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

Somit liegt α im I. Quadranten, bei der Hauptachsentransformation ist eine Drehung um den Winkel $\alpha=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\approx 26.57^\circ$ erfolgt.



2. Lösen Sie das Differenzialgleichungssystem
$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + y - 2\\ \dot{y} &= x - 3y + z + 1\\ \dot{z} &= 13x - 12y + 6z - 1\end{aligned}\quad !$$

Lösung:

Homogenes Differenzialgleichungssystem:
$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + y\\ \dot{y} &= x - 3y + z\\ \dot{z} &= 13x - 12y + 6z\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -3-\lambda & 1\\ 13 & -12 & 6-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda)(6-\lambda)+13+12(2-\lambda)-(6-\lambda)$$
$$= (\lambda^2-8\lambda+12)(-3-\lambda)+13+24-12\lambda-6+\lambda$$
$$= -3\lambda^2+24\lambda-36-\lambda^3+8\lambda^2-12\lambda+31-11\lambda = -\lambda^3+5\lambda^2+\lambda-5=0$$

Offensichtlich ist $\lambda_1=1$ eine Nullstelle dieses Polynoms.

$(\lambda^3-5\lambda^2-\lambda+5):(\lambda-1)=\lambda^2-4\lambda-5,\quad \lambda_{2/3}=2\pm\sqrt{4+5}=2\pm3=-1,5$

$$\begin{array}{l}\underline{\lambda^3-\lambda^2}\\ \quad -4\lambda^2-\lambda+5\\ \quad \underline{-4\lambda^2+4\lambda}\\ \qquad\quad -5\lambda+5\\ \qquad\quad \underline{-5\lambda+5}\\ \qquad\qquad\quad 0\end{array}$$

EV zu $\lambda_1=1$

$$\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 1\\ 13 & -12 & 5\\ \hline 1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 1\\ 0 & -25 & 5\\ \hline 1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & 1\end{array}$$

$x_1+x_2=0,\quad x_1=-x_2$

$-5x_2+x_3=0,\quad x_3=5x_2$

$$\text{EV } C\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2=-1$

$$\begin{array}{rrr} 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 13 & -12 & 7\\ \hline 1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 13 & -12 & 7\\ \hline 1 & -2 & 1\\ 0 & 7 & -3\\ 0 & 14 & -6\\ \hline 1 & -2 & 1\\ 0 & -\frac{7}{3} & 1\\ \hline 1 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{7}{3} & 1\end{array}$$

$x_1+\frac{1}{3}x_2=0,\quad x_1=-\frac{1}{3}x_2$

$-\frac{7}{3}x_2+x_3=0,\quad x_3=\frac{7}{3}x_2$

$$\text{EV } \widetilde{D}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\1\\\frac{7}{3}\end{pmatrix}=D\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_3=5$

$$\begin{array}{rrr} -3 & 1 & 0\\ 1 & -8 & 1\\ 13 & -12 & 1\\ \hline 1 & -8 & 1\\ -3 & 1 & 0\\ 13 & -12 & 1\\ \hline 1 & -8 & 1\\ 0 & -23 & 3\\ 0 & 92 & -12\\ \hline 1 & -8 & 1\\ 0 & -\frac{23}{3} & 1\\ \hline 1 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{23}{3} & 1\end{array}$$

$x_1-\frac{1}{3}x_2=0,\quad x_1=\frac{1}{3}x_2$

$-\frac{23}{3}x_2+x_3=0,\quad x_3=\frac{23}{3}x_2$

$$\text{EV } \widetilde{E}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\\frac{23}{3}\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}1\\3\\23\end{pmatrix}$$

allgemeine Lösung des homogenen Dgl.systems: $\vec{x}(t)=C\begin{pmatrix}-1\\1\\5\end{pmatrix}e^t+D\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix}e^{-t}+E\begin{pmatrix}1\\3\\23\end{pmatrix}e^{5t}$

Inhomogenes Differenzialgleichungssystem:

„rechte Seite“: $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Ansatz für spez. Lsg. in Form der rechten Seite: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$

Einsetzen in das inhomogene Differenzialgleichungssystem ergibt wegen $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{0}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= 2A_1 + A_2 - 2 \\ 0 &= A_1 - 3A_2 + A_3 + 1 \\ 0 &= 13A_1 - 12A_2 + 6A_3 - 1 \ . \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 13 & -12 & 6 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 13 & -12 & 6 & 1 \\ \hline 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 & 4 \\ 0 & 27 & -7 & 14 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 27 & -7 & 14 \\ \hline 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ \hline 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{7}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Somit ergibt sich als spezielle Lösung des inhomogenen Dgl.systems $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

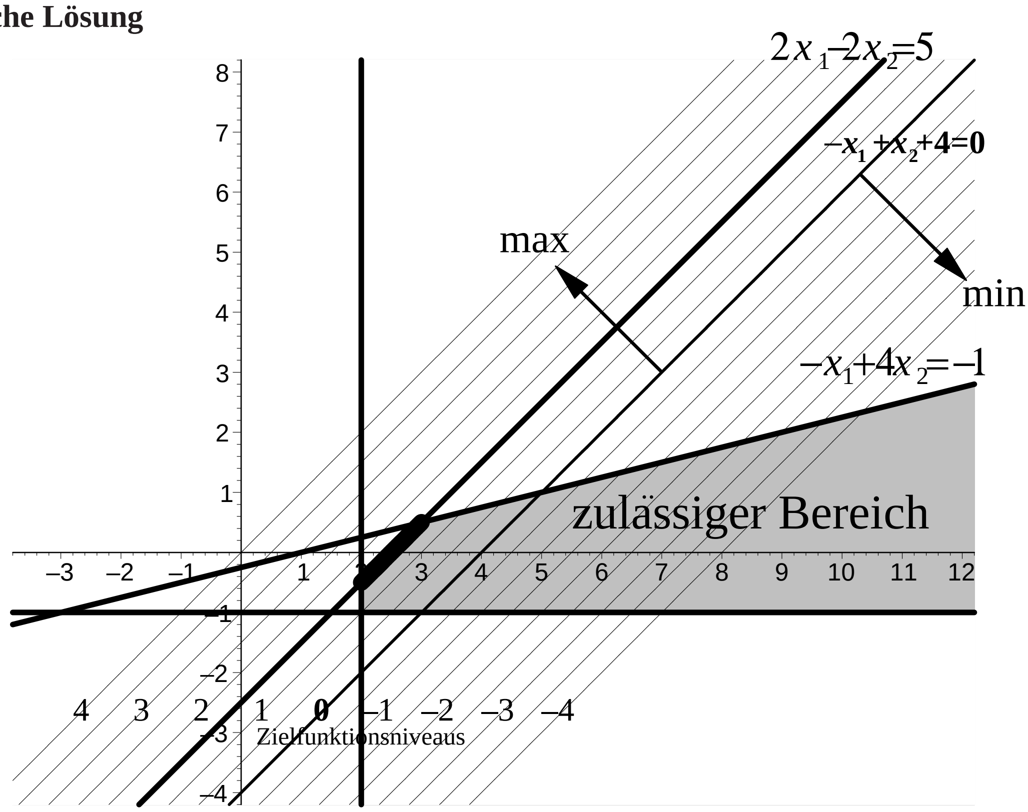
und als allgemeine Lösung $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + D \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} + E \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 23 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}$, d.h.

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 - C\mathrm{e}^{t} - D\mathrm{e}^{-t} + E\mathrm{e}^{5t}, \\ y(t) &= C\mathrm{e}^{t} + 3D\mathrm{e}^{-t} + 3E\mathrm{e}^{5t}, \\ z(t) &= -2 + 5C\mathrm{e}^{t} + 7D\mathrm{e}^{-t} + 23E\mathrm{e}^{5t}. \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion $z(x_1,x_2)=-x_1+x_2+4$ für solche x_1 und x_2, die die Bedingungen $2x_1-2x_2\ge 5$, $-x_1+4x_2\le -1$, $x_1\ge 2$ und $x_2\ge -1$ erfüllen, jeweils auf grafischem Wege und mit dem Simplexverfahren! Zeichnen Sie die bei dem Simplexalgorithmus durchlaufenen Basislösungen in die Skizze der grafischen Lösung ein. Für welche Argumente werden die Optima erreicht?

Lösung:

Grafische Lösung



Maximierung erfolgt durch Parallelverschiebung des Zielfunktionsniveaus nach links oben. Der zulässige Bereich wird verlassen auf dem Abschnitt der Gerade $-x_1+x_2+4=1.5$ für $2\le x_1\le 3$, das Zielfunktionsniveau ist dort 1.5.

Also beträgt das Maximum $\frac{3}{2}$ und wird für alle Punkte auf dem Geradenstück

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ 0\le t\le 1 \text{ angenommen.}$$

Minimierung erfolgt durch Parallelverschiebung des Zielfunktionsniveaus nach rechts unten. Das ist beliebig weit möglich, die Zielfunktion ist über dem zulässigen Bereich nach unten unbeschränkt und die Aufgabe damit nicht lösbar.

Simplexverfahren

Variable: $x_1'=x_1-2\ge 0$, $x_2'=x_2+1\ge 0$, d.h. $x_1=x_1'+2$, $x_2=x_2'-1$,

Zielfunktion: $z=-(x_1'+2)+(x_2'-1)+4=-x_1'+x_2'+1$, d.h. $z'=-x_1'+x_2'$, $z=z'+1$

NB1: $2(x_1'+2)-2(x_2'-1)-u_1=5 \implies 2x_1'-2x_2'-u_1=-1 \implies -2x_1'+2x_2'+u_1=1$

NB2: $-(x_1'+2)+4(x_2'-1)+u_2=-1 \implies -x_1'+4x_2'+u_2=5$

Maximierung der Zielfunktion: Normalform:

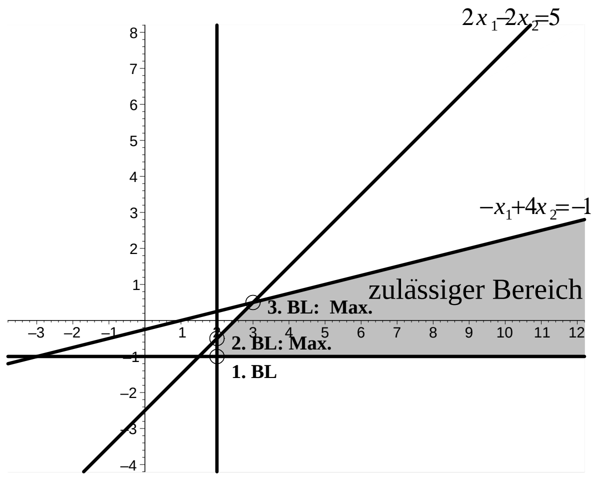
$$\boxed{\begin{array}{rcl} -\ x_1' +\ x_2' & & \longrightarrow \max \\ -2x_1'+2x_2'+\boldsymbol{u_1} & = & 1 \\ -\ x_1'+4x_2' \qquad +\boldsymbol{u_2} & = & 5 \\ x_1',\ x_2',\ u_1,\ u_2 & \ge & 0 \end{array}}$$

Simplexmethode:

BV	c_B	x_1' -1	x_2' 1	u_1 0	u_2 0	x_B	θ	
u_1	0	-2	2	1	0	1	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1.BL: $x_1'=x_2'=0, u_1=1, u_2=5 \Rightarrow x_1=2, x_2=-1$
u_2	0	-1	4	0	1	5	$\frac{5}{4}$	
		1	$\boxed{-1}$	0	0	0		
x_2'	1	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	—	2.BL: $x_1'=u_1=0, x_2'=\frac{1}{2}, u_2=3 \Rightarrow x_1=2, x_2=-\frac{1}{2}$
u_2	0	3	0	-2	1	3	$\boxed{1}$	alle $\Delta_j \geq 0 \Rightarrow$ Max., Δ_j ist auch für Nicht–BV
		$\boxed{0}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		x_1' gleich 0. $\Rightarrow$ Weiterrechnung möglich.
x_2'	1	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	3.BL: $u_1=u_2=0, x_1'=1, x_2'=\frac{3}{2} \Rightarrow x_1=3, x_2=\frac{1}{2}$
x_1'	-1	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\boxed{3}$	alle $\Delta_j \geq 0 \Rightarrow$ Max., Δ_j ist auch für Nicht–BV
		0	0	$\frac{1}{2}$	$\boxed{0}$	$\frac{1}{2}$		u_2 gleich 0, Weiterrechn. führt zurück zu 2.BL.

Alle Punkte auf der Kante zwischen den Ecken $(x_1', x_2') = (0, \frac{1}{2}) \mathrel{\widehat{=}} (x_1, x_2) = (2, -\frac{1}{2})$ und $(x_1', x_2') = (1, \frac{3}{2}) \mathrel{\widehat{=}} (x_1, x_2) = (3, \frac{1}{2})$ sind optimale Lösungen, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1; \qquad \text{Maximum: } z^* = z'^* + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$



Minimierung der Zielfunktion:

Hier muss lediglich statt der Funktion $z' = z - 1$ die Funktion $-z' = -z + 1 = x_1' - x_2'$ maximiert werden, Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x_1' - x_2' & \longrightarrow & \max \\ -2x_1' + 2x_2' + \boldsymbol{u_1} & = & 1 \\ -x_1' + 4x_2' \quad + \boldsymbol{u_2} & = & 5 \\ x_1', \ x_2', \ u_1, \ u_2 & \geq & 0 \end{array}}$$

Simplexmethode:

BV	c_B	x_1' 1	x_2' -1	u_1 0	u_2 0	x_B	θ	
u_1	0	-2	2	1	0	1	—	1.BL: $x_1'=x_2'=0, u_1=1, u_2=5 \Rightarrow x_1=2, x_2=-1$
u_2	0	-1	4	0	1	5	—	alle a_{i1} nichtpositiv $\Longrightarrow$
		$\boxed{-1}$	1	0	0	0		ZF unbeschränkt, LOA unlösbar

4. In einer Kompostanlage werden 2 Sorten Pflanzsubstrat hergestellt. Für die Herstellung von 1 hl Substrat Sorte A werden 40 l Gartenerde, 40 l Füllstoffe und 20 l Kompost, für 1 hl Substrat Sorte B werden 20 l Gartenerde, 40 l Füllstoffe und 40 l Kompost benötigt. Pro Hektoliter Substrat werden bei der Sorte A 3 € und bei der Sorte B 5 € erlöst. Es stehen **höchstens** je 800 hl Gartenerde und Füllstoffe zur Verfügung, sollen aber **mindestens** 880 hl Kompost verwendet werden. Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Erlös maximiert werden.

a) Stellen Sie das mathematische Modell auf!
b) Wenden Sie das grafische Lösungsverfahren auf das Modell an! Welche Schlussfolgerung ergibt sich?
c) Wenden Sie das Simplexverfahren auf das Modell an!

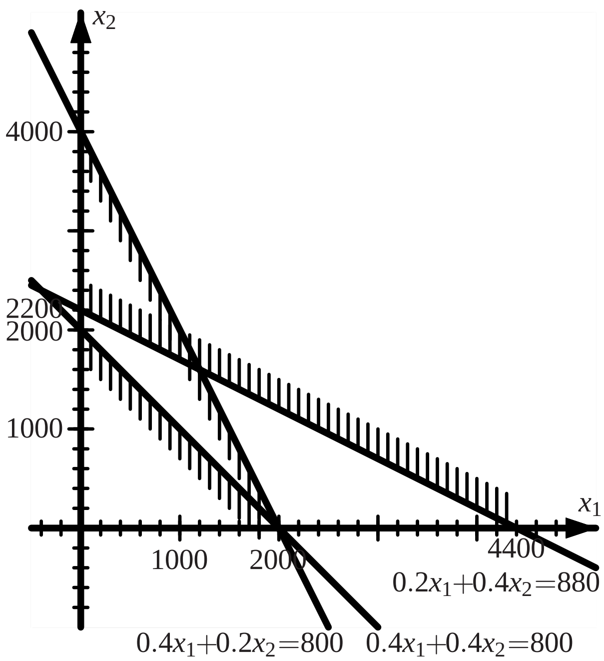
Lösung:

a)

ges.: x_1: herzustellendes Substrat A in hl,
x_2: herzustellendes Substrat B in hl

Gewinn:	$3\ x_1 + 5\ x_2 \longrightarrow$ max		
Gartenerde:	$0.4x_1 + 0.2x_2$	$\leq$	800
Füllstoffe:	$0.4x_1 + 0.4x_2$	$\leq$	800
Kompost:	$0.2x_1 + 0.4x_2$	$\geq$	880
Nichtnegativität:	$x_1,\ x_2$	$\geq$	0

b)



Der zulässige Bereich ist leer, also ist die Aufgabe unlösbar.

c) Es empfiehlt sich, die Ungleichungen zunächst durch 0.2 bzw. 0.4 zu teilen. Zur Überführung in die Normalform müssen Schlupfvariablen eingeführt werden. Man erhält:

$$\boxed{\begin{array}{llr} 3x_1 + 5x_2 & \longrightarrow & \max \\ 2x_1 + x_2 + \boldsymbol{u_1} & = & 4000 \\ x_1 + x_2 + \boldsymbol{u_2} & = & 2000 \\ x_1 + 2x_2 - u_3 & = & 4400 \\ x_1,\ x_2,\ u_1,\ u_2,\ u_3 & \geq & 0 \end{array}}$$

Die dritte Gleichung enthält keine Variable, die nur in dieser Zeile vorkommt und dort einen positiven Koeffizienten hat. Deshalb kann keine Basislösung abgelesen werden, vielmehr muss zu ihrer Bestimmung (oder zum Ausschluss ihrer Existenz) eine Hilfsaufgabe eingeführt werden:

$$\boxed{\begin{array}{llr} -v_3 & \longrightarrow & \max \\ 2x_1 + x_2 + \boldsymbol{u_1} & = & 4000 \\ x_1 + x_2 + \boldsymbol{u_2} & = & 2000 \\ x_1 + 2x_2 - u_3 + \boldsymbol{v_3} & = & 4400 \\ x_1,\ x_2,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ v_3 & \geq & 0 \end{array}}$$

		x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	v_3		
BV	c_B	0	0	0	0	0	-1	x_B	θ
u_1	0	2	1	**1**	**0**	0	**0**	4000	4000
u_2	0	1	1	**0**	**1**	0	**0**	2000	$\boxed{2000}$
v_3	-1	1	2	**0**	**0**	-1	**1**	4400	2200
		-1	$\boxed{-2}$	**0**	**0**	1	**0**	-4400	
u_1	0	1	**0**	**1**	-1	0	**0**	2000	
x_2	0	1	**1**	**0**	1	0	**0**	2000	
v_3	-1	-1	**0**	**0**	-2	-1	**1**	400	
		1	**0**	**0**	2	1	**0**	-400	

Alle Optimalitätsindikatoren Δ_j sind nichtnegativ, so dass das Maximum der Hilfsaufgabe erreicht ist. Es beträgt -400. Da es nicht gleich 0 ist, ist der zulässige Bereich der Ausgangsaufgabe leer, die Aufgabe damit unlösbar.

---

5. Ein Eisverkäufer verkauft Eisportionen „Vanilletraum“ mit 3 Kugeln Vanille- und 1 Kugel Schokoeis sowie „Schokotraum“ mit 1 Kugel Vanille- und 3 Kugeln Schokoeis. Er erzielt pro Portion Vanilletraum einen Gewinn von 3 Geldeinheiten und pro Portion Schokotraum einen Gewinn von 2 Geldeinheiten. Zur Verfügung stehen 630 Kugeln Vanille- und 450 Kugeln Schokoeis. Wie viele Portionen der beiden Sorten müssen verkauft werden, um den in dieser Situation maximal möglichen Gewinn zu erreichen? Stellen Sie das mathematische Modell hierzu auf und lösen Sie es mit dem Simplexverfahren!

Lösung:

x_1: Portionen „Vanilletraum“, x_2: Portionen „Schokotraum“

Gewinn: $3x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max$

Kugeln Vanilleeis: $3x_1 + x_2 \leq 630$

Kugeln Schokoeis: $x_1 + 3x_2 \leq 450$

Nichtnegativität: $x_1, \; x_2 \geq 0$, außerdem Ganzzahligkeit

Normalform:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} z = 3x_1 + 2x_2 & \longrightarrow & \max \\ 3x_1 + x_2 + \boldsymbol{u_1} & = & 630 \\ x_1 + 3x_2 + \boldsymbol{u_2} & = & 450 \\ x_1, \; x_2, \; u_1, \; u_2 & \geq & 0 \end{array}}$$

		x_1	x_2	u_1	u_2		
BV	c_B	3	2	0	0	x_B	θ
u_1	0	3	1	**1**	**0**	630	$\boxed{210}$
u_2	0	1	3	**0**	**1**	450	450
		$\boxed{-3}$	-2	**0**	**0**	0	
x_1	3	**1**	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	**0**	210	630
u_2	0	**0**	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	**1**	240	$\boxed{90}$
		0	$\boxed{-1}$	1	**0**	630	
x_1	3	**1**	**0**	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	180	
x_2	2	**0**	**1**	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	90	
		0	**0**	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{8}$	720	

Alle Optimalitätsindikatoren sind nichtnegativ, die für die Nichtbasisvariablen positiv. Also liegt ein eindeutiges Optimum vor.

Es müssen 180 Portionen „Vanilletraum“ und 90 Portionen „Schokotraum“ verkauft werden, um den maximal möglichen Gewinn von 720 Geldeinheiten zu erzielen.