Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik 04. Juni 2010

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 4: Vektorfunktionen, Differenzialgleichungen, Eigenwertprobleme

Letzter Abgabetermin: 22. Juni 2010
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 4“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Betrachtet werden die Kurven $\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_3(t) = \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$ jeweils für $t \in \mathbb{R}$.
   a) Zeigen Sie, dass $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ gilt! Welches Analogon hat diese Beziehung für Winkelfunktionen?
   b) Berechnen Sie die Tangentenvektoren für die drei Kurven!
   c) Geben Sie mithilfe der Beziehungen aus a) parameterfreie Gleichungen der drei Kurven an!
   d) Stellen Sie die drei Kurven grafisch dar! Wie oft werden die Kurven für $-\infty < t < \infty$ durchlaufen?
   e) Beschreiben Sie die in der oberen Halbebene (einschließlich x-Achse) gelegenen Teile der drei Kurven als Funktionen $y = f_i(x),\ i = 1, 2, 3$!
   f) Berechnen Sie für die drei Funktionen die Ableitung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ zum einen mithilfe der Formel $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ aus $\vec{x}'(t)$, zum anderen als $f'(x)$!
   g) Die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ sollen zu einer einheitlichen über der gesamten x-Achse definierten Funktion zusammengefasst werden. Beschreiben Sie diese Funktion durch einen einheitlichen Ausdruck!
   h) Berechnen Sie die Gleichungen der Tangenten an die gegebenen Kurven in den Punkten $(1/2, \sqrt{3}/2)$, $(1, 0)$ und $(2, \sqrt{3})$ und zeichnen Sie die Tangenten in das Bild aus d) ein!

2. a) Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -2+5\cos t \\ 3+5\sin t \\ t \end{pmatrix}$? Skizzieren Sie die Kurve!
   b) Ermitteln Sie den Durchstoßpunkt der Kurve durch die x-y-Ebene und die Gleichung der Tangente in diesem Punkt!
   c) In welchem Winkel schneidet die Kurve die x-y-Ebene?

3. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' = \frac{(x+29)y}{x^2+3x-28}$!

4. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y' - 2\frac{y}{x} = x^2,\ y(1) = 4$!

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$ und führen Sie die Diagonalisierung mithilfe der Matrix aus den Eigenvektoren rechnerisch aus!

Aufgabenkomplex 4: Vektorfunktionen, Differenzialgleichungen, Eigenwertprobleme

Letzter Abgabetermin: 22. Juni 2010

---

1. Betrachtet werden die Kurven $\vec{x}_1(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\y_1(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh t\\\sinh t\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2(t)=\begin{pmatrix}x_2(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}$ und $\vec{x}_3(t)=\begin{pmatrix}x_3(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cosh t\\\sinh t\end{pmatrix}$ jeweils für $t\in\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ gilt! Welches Analogon hat diese Beziehung für Winkelfunktionen?

b) Berechnen Sie die Tangentenvektoren für die drei Kurven!

c) Geben Sie mithilfe der Beziehungen aus a) parameterfreie Gleichungen der drei Kurven an!

d) Stellen Sie die drei Kurven grafisch dar! Wie oft werden die Kurven für $-\infty<t<\infty$ durchlaufen?

e) Beschreiben Sie die in der oberen Halbebene (einschließlich x-Achse) gelegenen Teile der drei Kurven als Funktionen $y=f_i(x),\ i=1,2,3$!

f) Berechnen Sie für die drei Funktionen die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ zum einen mithilfe der Formel $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$ aus $\vec{x}\,'(t)$, zum anderen als $f'(x)$!

g) Die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ sollen zu einer einheitlichen über der gesamten x-Achse definierten Funktion zusammengefasst werden. Beschreiben Sie diese Funktion durch einen einheitlichen Ausdruck!

h) Berechnen Sie die Gleichungen der Tangenten an die gegebenen Kurven in den Punkten $(1/2,\sqrt{3}/2)$, $(1,0)$ und $(2,\sqrt{3})$ und zeichnen Sie die Tangenten in das Bild aus d) ein!

Lösung:

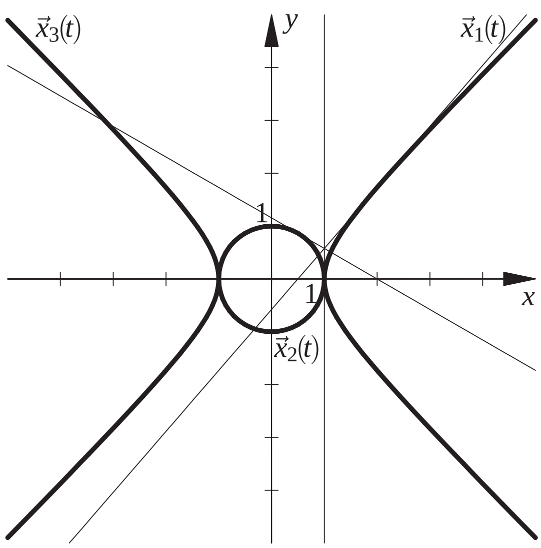
a) $\cosh^2 t-\sinh^2 t=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2+\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2=\frac{\left(e^{2t}+2+e^{-2t}\right)-\left(e^{2t}-2+e^{-2t}\right)}{4}=\frac{4}{4}=1$

Dies entspricht für Winkelfunktionen dem Satz des Pythagoras $\cos^2 t+\sin^2 t=1$.

b) $\vec{x}_1{}'(t)=\begin{pmatrix}\sinh t\\\cosh t\end{pmatrix}$, $\quad\vec{x}_2{}'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\end{pmatrix}$, $\quad\vec{x}_3{}'(t)=\begin{pmatrix}-\sinh t\\\cosh t\end{pmatrix}$

c) $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_3(t)$: $x^2-y^2=1$ (Hyperbel)
$\vec{x}_2(t)$: $x^2+y^2=1$ (Kreis)

d)



$\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_3(t)$ werden einmal durchlaufen, da der Sinus Hyperbolicus monoton von $-\infty$ nach ∞ wächst.

$\vec{x}_2(t)$ wird unendlich oft durchlaufen, da Sinus und Kosinus periodisch mit gleicher Periodenlänge sind.

Bei h) berechnete Tangenten:
$x+\sqrt{3}y=2$ für den Punkt $(1/2,\sqrt{3}/2)$,
$x=1$ für den Punkt $(1,0)$,
$2x-\sqrt{3}y=1$ für den Punkt $(2,\sqrt{3})$.

e) $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_3(t)$: $y^2=x^2-1,\ y=\sqrt{x^2-1}$
$\vec{x}_2(t)$: $y^2=1-x^2,\ y=\sqrt{1-x^2}$ (da jeweils obere Halbebene)

$$f_1(x)=\sqrt{x^2-1},\quad 1\le x,$$
$$f_2(x)=\sqrt{1-x^2},\ -1\le x\le\ 1,$$
$$f_3(x)=\sqrt{x^2-1},\quad x\le -1$$

f) $\vec{x}_1(t)$: $\dfrac{dy_1}{dx_1}=\dfrac{y_1'(t)}{x_1'(t)}=\dfrac{\cosh t}{\sinh t}=\coth t,\quad f_1'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

(Wg. $y\ge 0$ (obere HE) ist $y=\sqrt{x^2-1}$, so dass sich in beiden Fällen $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\cosh t}{\sinh t}$ ergibt.)

$\vec{x}_2(t)$: $\dfrac{dy_2}{dx_2}=\dfrac{y_2'(t)}{x_2'(t)}=\dfrac{\cos t}{-\sin t}=-\cot t,\quad f_2'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(Wg. $y\ge 0$ (obere HE) ist $y=\sqrt{1-x^2}$, so dass sich in beiden Fällen $-\dfrac{x}{y}=-\dfrac{\cos t}{\sin t}$ ergibt.)

$\vec{x}_3(t)$: $\dfrac{dy_3}{dx_3}=\dfrac{y_3'(t)}{x_3'(t)}=\dfrac{\cosh t}{-\sinh t}=-\coth t,\quad f_3'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

(Wg. $y\ge 0$ (obere HE) ist $y=\sqrt{x^2-1}$, so dass sich in beiden Fällen $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-\cosh t}{\sinh t}$ ergibt.)

g) $f(x)=\sqrt{|x^2-1|},\ x\in\mathbb{R}$

h) $(1/2,\sqrt{3}/2)$ liegt wegen $x^2+y^2=1$ auf dem Kreis $\vec{x}_2(t)$, dabei ist

$\vec{x}_2\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2{}'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$, die Tangente also $\vec{x}_{\text{Tangente}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$.

Man kann auch mit mit der Darstellung $f_2(x)$ argumentieren, die Tangentengleichung ergibt sich da zu $T_1(x)=f_2\left(\frac{1}{2}\right)+f_2'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}x$, d.h. $x+\sqrt{3}y=2$, das ist die parameterfreie Darstellung der oben mit dem Parameter u beschriebenen Gerade.

$(1,0)$ liegt wegen $x^2\pm y^2=1$ auf dem Kreis $\vec{x}_2(t)$ und auf dem rechten Hyperbelzweig $\vec{x}_1(t)$, dabei ist

$\vec{x}_2(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2{}'(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, die Tangente an den Kreis also $\vec{x}_{\text{Tangente}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{x}_1(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{x}_1{}'(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, die Tangente an die Hyperbel also auch $\vec{x}_{\text{Tangente}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Für die Darstellungen $f_2(x)$ und $f_1(x)$ streben die Ableitungen für $x\to 1$ gegen $-\infty$ bzw. ∞, so dass sich die senkrechte Gerade $x=1$ ergibt, das ist die parameterfreie Darstellung der angegebenen Gerade.

$(2,\sqrt{3})$ liegt wegen $x^2-y^2=1,\ x\ge 1$ auf dem rechten Hyperbelzweig $\vec{x}_1(t)$. Da sich der Tangentenvektor einfach durch Vertauschen der Komponenten des Ortsvektors ergibt, muss man den Parameter $\bar{t}$ nicht explizit berechnen. Es gilt

$\vec{x}_1(\bar{t})=\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\vec{x}_1{}'(\bar{t})=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}$, die Tangente also $\vec{x}_{\text{Tangente}}=\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 2\end{pmatrix}$.

Man kann auch mit mit der Darstellung $f_1(x)$ argumentieren, die Tangentengleichung ergibt sich da zu $T_1(x)=f_1(2)+f_2'(2)(x-2)=\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}(x-2)=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}x$, d.h. $2x-\sqrt{3}y=1$, das ist die parameterfreie Darstellung der angegebenen Gerade.

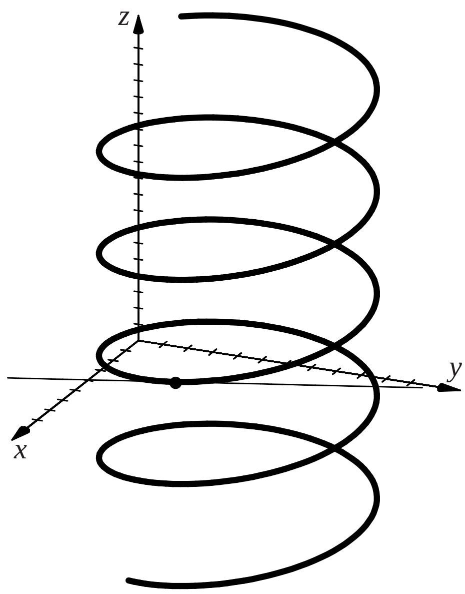
2. a) Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}-2+5\cos t\\ 3+5\sin t\\ t\end{pmatrix}$? Skizzieren Sie die Kurve!

b) Ermitteln Sie den Durchstoßpunkt der Kurve durch die x-y-Ebene und die Gleichung der Tangente in diesem Punkt!

c) In welchem Winkel schneidet die Kurve die x-y-Ebene?

Lösung:

a) Es handelt sich um eine Schraubenlinie. Durch Einsetzen von $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ überzeugt man sich leicht davon, dass sie auf dem Kreiszylinder $(x+2)^2+(y-3)^2=5^2$, also dem Kreiszylinder mit der Achse $(-2,3,z)$ und dem Radius 5, verläuft.



b) Für $z=t=0$ erhält man $\vec{x}(0)=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$, so dass die Kurve im Punkt $(3,3,0)$ die x-y-Ebene durchstößt.

Ferner ist $\vec{x}\,'(t)=\begin{pmatrix}-5\sin t\\ 5\cos t\\ 1\end{pmatrix}$, $\vec{x}\,'(0)=\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}$, die Tangente in diesem Punkt also $\vec{x}_{\text{Tangente}}=\begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}$.

c) Die Richtung der Kurve im Durchstoßpunkt, das ist die Richtung der Tangente in diesem Punkt, bildet mit dem Normalenvektor der x-y-Ebene einen Winkel von

$$\arccos\frac{\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}\approx 78.69^\circ.$$

Die Schraubenlinie schneidet die x-y-Ebene somit in einem Winkel von 11.31°. (Das kann man natürlich auch direkt mit dem Arkussinus berechnen.)

---

3. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y'=\dfrac{(x+29)\,y}{x^2+3x-28}$!

Lösung:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(x+29)\,y}{x^2+3x-28}$$

Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{x+29}{x^2+3x-28}\,\mathrm{d}x \qquad \text{bzw.} \qquad y=0\text{: } \boxed{y(x)\equiv 0} \text{ ist Lösung (1)}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{x+29}{x^2+3x-28}\,\mathrm{d}x$$

Partialbruchzerlegung wie bei Aufgabe 2 aus Aufgabenkomplex 3:

$$x^2+3x-28=0,\quad x_{1/2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{112}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2}=\begin{cases}4\\-7\end{cases}$$

$$\frac{x+29}{(x-4)(x+7)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+7}=\frac{A(x+7)+B(x-4)}{(x-4)(x+7)}\implies x+29=(A+B)x+(7A-4B)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{ll} A+\ B=\ \ 1 & |\cdot 4\\ 7A-4B=29 & |+\\ 4A+4B=\ \ 4 & |+ \end{array}\qquad 11A=33,\ A=3,\ B=-2,\quad \frac{x+29}{x^2+3x-28}=\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x+7}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\left(\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x+7}\right)\mathrm{d}x$$

$$\ln|y|=3\ln|x-4|-2\ln|x+7|+D=\ln\frac{|x-4|^3}{(x+7)^2}+D=\ln\frac{|x-4|^3}{(x+7)^2}+\ln C=\ln\left(C\frac{|x-4|^3}{(x+7)^2}\right),$$

$D=\ln C$ beliebig reell, $C>0$

$$\ln|y|=C\frac{|x-4|^3}{(x+7)^2},\ C>0$$

Fallunterscheidung:

$y,\ x-4$ gleiches Vz.: $\boxed{y=C\frac{(x-4)^3}{(x+7)^2},\ C>0}$ (2)

$y,\ x-4$ ungleiches Vz.: $y=-C\frac{(x-4)^3}{(x+7)^2},\ C>0 \iff \boxed{y=C\frac{(x-4)^3}{(x+7)^2},\ C<0}$ (3)

Die Zusammenfassung von (1) bis (3) führt zur allgemeinen Lösung $y(x)=C\frac{(x-4)^3}{(x+7)^2},\ C\in\mathbb{R}$.

(An der Stelle $x=4$ könnte zwischen den Zweigen der Lösung gewechselt werden (Bifurkation), so dass sich weitere Lösungen ergeben würden. Darauf soll hier aber nicht näher eingegangen werden.)

---

4. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y'-2\frac{y}{x}=x^2,\ y(1)=4$!

Lösung:

homogene Dgl.: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\frac{y}{x},\quad \frac{\mathrm{d}y}{y}=2\frac{\mathrm{d}x}{x},\quad \ln y=2\ln x+\ln C,\quad y(x)=Cx^2$

(Sonderfall $y=0$ und Beträge unter den Logarithmen wie üblich behandelt)

inhomogene Dgl.: Ansatz Variation der Konstanten: $y(x)=C(x)x^2,\quad y'(x)=C'(x)x^2+2C(x)x$

$$y'-2\frac{y}{x}=C'x^2+2Cx-2\frac{Cx^2}{x}=C'x^2=x^2,\quad C'=1,\quad C(x)=x+D,$$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. also $y(x)=x^3+Dx^2$

Anfangsbedingung: $y(1)=1+D=4,\quad D=3,$

Lösung der Anfangswertaufgabe also $y(x)=x^3+3x^2$

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$ und führen Sie die Diagonalisierung mithilfe der Matrix aus den Eigenvektoren rechnerisch aus!

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 12 \\ -8 & -9-\lambda \end{vmatrix} = (11-\lambda)(-9-\lambda)+96 = -99-2\lambda+\lambda^2+96 = \lambda^2-2\lambda-3 = 0$$

Eigenwerte $\lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

EV zu $\lambda_1 = 3$: $\begin{array}{rr} 8 & 12 \\ -8 & -12 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$ EV $A\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

EV zu $\lambda_2 = -1$: $\begin{array}{rr} 12 & 12 \\ -8 & -8 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ EV $B\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrix aus den linear unabhängigen Eigenvektoren: $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Im Falle der Invertierbarkeit gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (s. Aufgabe 1a) aus Übung 10 des 1. Semesters). Also ist $\boldsymbol{V}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$