Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik 18. Mai 2010

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 3: Integralrechnung

Letzter Abgabetermin: 01. Juni 2010
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 3" kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Bestimmen Sie mittels Integration durch Substitution bzw. partieller Integration

   a) $\int \sin x\, e^{\cos x}\, dx$, b) $\int \frac{\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\, dy$, c) $\int \frac{dz}{\cos^2 z\, \sqrt{1+\tan z}}$,

   d) $\int x \cos x\, dx$, e) $\int (ax^2+bx+c) \sin x\, dx$, f) $\int x^2 \ln x\, dx$!

2. Integrieren Sie $f(x) = \frac{x+29}{x^2+3x-28}$, indem Sie für die zu integrierende Funktion eine Partialbruchzerlegung nach Linearfaktoren des Nenners in der Form $\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$ mit geeigneten Koeffizienten A und B vornehmen!

3. Berechnen Sie den Inhalt der von den Kurven $y = 2x^3+2x^2-4x$ und $y = -x^3-x^2+2x$ begrenzten endlichen Fläche!

4. Ein 1 m langer konischer Stab habe einen Durchmesser von $(1+x)$ cm, $0 \le x \le 1$ [m]. Berechnen Sie sein Volumen!

5. a) Zeigen Sie, dass für $n \ge 1$ die Beziehung $\frac{1}{n} > \int\limits_n^{n+1} \frac{dx}{x}$ gilt!

   b) Beweisen Sie mithilfe dieser Beziehung die Divergenz der harmonischen Reihe!
   Veranschaulichen Sie die Überlegungen grafisch!

6. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

   a) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$, b) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$, c) $\int\limits_0^{\pi/2} \tan x\, dx$, d) $\int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+4}$!

Aufgabenkomplex 3: Integralrechnung

Letzter Abgabetermin: 01. Juni 2010

---

1. Bestimmen Sie mittels Integration durch Substitution bzw. partieller Integration

a) $\displaystyle\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\,dy$, c) $\displaystyle\int \frac{dz}{\cos^2 z\,\sqrt{1+\tan z}}$,

d) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$, e) $\displaystyle\int (ax^2+bx+c)\sin x\,dx$, f) $\displaystyle\int x^2\ln x\,dx$!

Lösung:

a) Beispiel enthält Funktion $t(x)=\cos x$ und ihre Ableitung $t'(x)=-\sin x$ $\longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{ll}\text{Substitution} & t=\cos x\\ & \dfrac{dt}{dx}=-\sin x\end{array}\right.$

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx=-\int e^t\frac{dt}{dx}\,dx=-\int e^t\,dt=-e^t+C=-e^{\cos x}+C$$

Man kann auch schreiben: $dt=-\sin x\,dx$,
$d\cos x=-\sin x\,dx$.

Dann ist das gerade Notierte gleichbedeutend mit

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx=-\int \underset{\uparrow}{e^{\cos x}d\cos x}=-e^{\cos x}+C.$$

d.h $e^t\,dt$, also Substitution nur gedanklich ausgeführt

b) Beispiel enthält Funktion $\sqrt{y}$ und (bis auf einen konstanten Faktor) ihre Ableitung $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$,
deshalb Substitution $t=\sqrt{y}$, $\dfrac{dt}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{y}}=2\dfrac{dt}{dy}$:

$$\int\frac{\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\,dy=\int\cos t\;2\frac{dt}{dy}\,dy=2\int\cos t\,dt=2\sin t+C=2\sin\sqrt{y}+C$$

Man kann auch schreiben: $\displaystyle\int\cos\sqrt{y}\,\frac{dy}{\sqrt{y}}=\int\cos\sqrt{y}\;2d\sqrt{y}=2\sin\sqrt{y}+C$

c) Beispiel enthält Funktion $1+\tan z$ und ihre Ableitung $\dfrac{1}{\cos^2 z}$,
deshalb Substitution $t=1+\tan z$, $\dfrac{dt}{dz}=\dfrac{1}{\cos^2 z}$:

$$\int\frac{dz}{\cos^2 z\,\sqrt{1+\tan z}}=\int\frac{dt}{dz}\frac{dz}{\sqrt{t}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\int t^{-\frac12}\,dt=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{1+\tan z}+C$$

Man kann auch schreiben: $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+\tan z}}\frac{dz}{\cos^2 z}=\int(1+\tan z)^{-\frac12}\,d(1+\tan z)=2\sqrt{1+\tan z}+C$

d) Partielle Integration: $\displaystyle\int uv'\,dx=uv-\int u'v\,dx$

Bei der partiellen Integration wird u differenziert, v' integriert. Damit das Integral auf der rechten Seite einfacher wird, müssen u und v' so gewählt werden, dass sich möglichst u beim Differenzieren vereinfacht und v' leicht integrieren lässt.

$u=x$ $\quad v'=\cos x$
$u'=1$ $\quad v=\sin x$

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C$$

e) $$\int \underset{u}{(ax^2+bx+c)}\,\underset{v'}{\sin x}\,\mathrm{d}x = -(ax^2+bx+c)\cos x + \int \underset{u}{(2ax+b)}\,\underset{v'}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -(ax^2+bx+c)\cos x + (2ax+b)\sin x - 2a\int \sin x\,\mathrm{d}x$$
$$= -(ax^2+bx+c)\cos x + (2ax+b)\sin x + 2a\cos x$$
$$= (-ax^2-bx+2a-c)\cos x + (2ax+b)\sin x$$

f) Der Faktor x^2 vereinfacht sich zwar beim Differenzieren, $\ln x$ lässt sich aber nicht einfach integrieren. Durch Differenzieren wird aber der Logarithmus beseitigt. Deshalb wählt man $u=\ln x,\ u'=\dfrac{1}{x},\ v'=x^2,\ v=\dfrac{x^3}{3}$:

$$\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$$

---

2. Integrieren Sie $f(x) = \dfrac{x+29}{x^2+3x-28}$, indem Sie für die zu integrierende Funktion eine Partialbruchzerlegung nach Linearfaktoren des Nenners in der Form $\dfrac{A}{x-x_1}+\dfrac{B}{x-x_2}$ mit geeigneten Koeffizienten A und B vornehmen!

Lösung:

Partialbruchzerlegung zur Integration echt (Nennergrad $>$ Zählergrad) gebrochen-rationaler Funktionen: Faktorisierung des Nennerpolynoms nach Nullstellen und Aufspaltung der gebrochenrationalen Funktion:

$$x^2+3x-28=0,\quad x_{1/2} = -\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{112}{4}} = -\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}} = -\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2} = \begin{cases} 4 \\ -7 \end{cases}$$

$$\frac{x+29}{(x-4)(x+7)} = \frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+7},\ A \text{ und } B \text{ zu bestimmen}$$

$$\frac{x+29}{(x-4)(x+7)} = \frac{A(x+7)+B(x-4)}{(x-4)(x+7)} \implies x+29 = (A+B)x + (7A-4B)$$

Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen, daher Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{rcll} A+B &=& 1 & |\cdot 4 \\ 7A-4B &=& 29 & |+ \\ 4A+4B &=& 4 & |+ \end{array}\qquad 11A=33,\ A=3,\ B=-2,\ \frac{x+29}{(x-4)(x+7)} = \frac{3}{x-4}-\frac{2}{x+7}$$

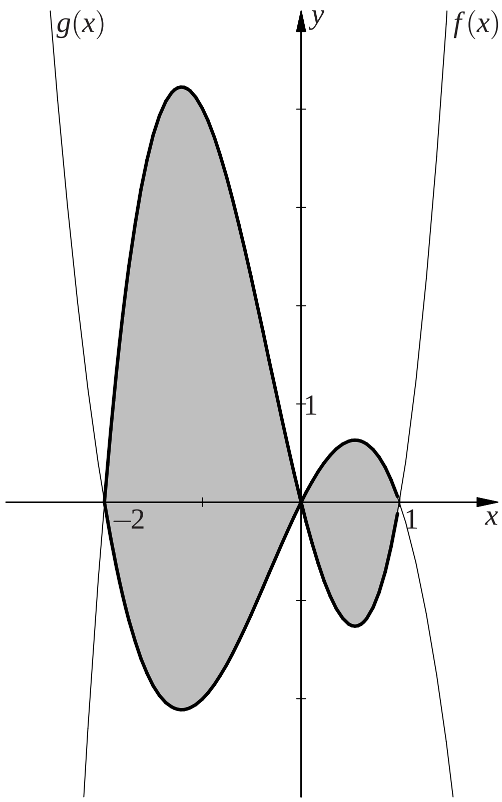
$$\int \frac{x+29}{(x-4)(x+7)}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x+7}\right)\mathrm{d}x = 3\ln|x-4| - 2\ln|x+7| + C = \ln\frac{|x-4|^3}{(x+7)^2}+C$$

(Die Lösung kann auch in der Form $\ln\dfrac{|x-4|^3}{(x+7)^2}+\ln D = \ln\left(D\dfrac{|x-4|^3}{(x+7)^2}\right)$ mit einer beliebigen positiven Konstante D dargestellt werden. Ist D nämlich eine beliebige positive Konstante, so ist $C=\ln D$ eine beliebige reelle Konstante. Eine solche Darstellung erweist sich im Zusammenhang mit der Lösung von Differenzialgleichungen als zweckmäßig.)

3. Berechnen Sie den Inhalt der von den Kurven $y=2x^3+2x^2-4x$ und $y=-x^3-x^2+2x$ begrenzten endlichen Fläche!

Lösung:

Auf den rechten Seiten stehen in beiden Fällen Vielfache von $x^3+x^2-2x=x(x^2+x-2)$, folglich haben die Polynome $f(x)=2x^3+2x^2-4x$ und $g(x)=-x^3-x^2+2x$ die Nullstellen $x_1=0,\ x_{2/3}=-\frac{1}{2}+\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$.



$$\int(2x^3+2x^2-4x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-2x^2$$

$$\int(-x^3-x^2+2x)\,\mathrm{d}x=-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2$$

$$A=\int_{-2}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}g(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-2}^{0}g(x)\,\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=-\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-2x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=-8+\frac{16}{3}+8-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1-4+\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+2=\underline{\underline{\frac{37}{4}}}$$

---

4. Ein 1 m langer konischer Stab habe einen Durchmesser von $(1+x)$ cm, $0\le x\le 1$ [m]. Berechnen Sie sein Volumen!

Lösung:

Bei konstantem Durchmesser gilt $V=\frac{\pi}{4}d^2 l$. Zerlegt man den Stab in kleine Teile der Länge Δx, so ergibt sich durch Grenzübergang für die Riemannschen Integralsummen als Volumen des Stabes $V=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\frac{\pi}{4}(d(\xi_i))^2\,\Delta x=\int_a^b\frac{\pi}{4}(d(x))^2\,\mathrm{d}x$: Volumen = Querschnitt mal Länge.

Diese Formel findet sich als Formel für das Volumen eines Rotationskörpers üblicherweise in der Form $V=\pi\int_a^b(r(x))^2\,\mathrm{d}x$ für die Rotation von $r(x)$ um die x-Achse in Formelsammlungen.

$$V=\frac{\pi}{4}\int_0^1(1+x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12}(1+x)^3\Big|_0^1=\frac{2^3-1^3}{12}\pi=\frac{7}{12}\pi\ [\mathrm{cm}^2\mathrm{m}]$$

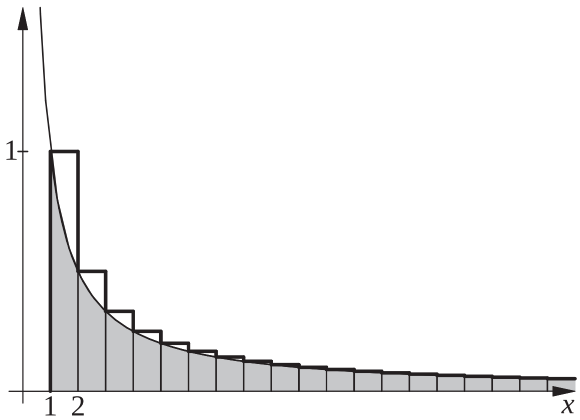
Also beträgt das Volumen $\frac{700}{12}\pi\ \mathrm{cm}^3=\frac{175}{3}\pi\,\mathrm{cm}^3\approx 183{,}26\ \mathrm{cm}^3$.

5. a) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ die Beziehung $\dfrac{1}{n} > \displaystyle\int\limits_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ gilt!

b) Beweisen Sie mithilfe dieser Beziehung die Divergenz der harmonischen Reihe! Veranschaulichen Sie die Überlegungen grafisch!

Lösung:

a) Da für $n < x < n+1$ gilt, dass $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{x}$ ist, ist das Rechteck mit der Grundseitenlänge 1 und Höhe $\dfrac{1}{n}$ größer als die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ zwischen $x = n$ und $x = n+1$, die von dem Integral beschrieben wird.



b) Es gilt

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} > \int\limits_1^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x \Big|_1^{k+1} = \ln(k+1) \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty.$$

Da das uneigentliche Integral $\displaystyle\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ divergiert, divergiert die harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ erst recht.

---

6. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

a) $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$, b) $\displaystyle\int\limits_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}}$, c) $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/2} \tan x \,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}$!

Lösung:

a) $$\int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x-1}} = \int\limits_1^2 (x-1)^{-\frac{1}{3}} \,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} \Big|_1^2 = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

b) $$\int\limits_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} = \int\limits_2^{\infty} (x-1)^{-\frac{1}{3}} \,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} \Big|_2^{\infty} = \infty - \frac{3}{2} = \infty$$

c) $$\int\limits_0^{\pi/2} \tan x \,\mathrm{d}x = \int\limits_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{\cos x} = \int\limits_{t=1}^{t=0} \frac{-\mathrm{d}t}{t} = -\ln t \big|_1^0 = -(-\infty) - 0 = \infty$$

$\left(\text{Substitution } t = \cos x,\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x,\ \sin x \,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t\right)$

d) $$\int \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{x^2}{4}+1} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$$

$\left(\text{Substitution: } t = \dfrac{x}{2},\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2},\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t\right)$

$$\int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-\infty}^{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\arctan\sqrt{3} - \frac{1}{2}\arctan(-\infty) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi+3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$