Technische Universität Chemnitz 27. April 2010
Fakultät für Mathematik

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 2: Differenzialrechnung

Letzter Abgabetermin: 18. Mai 2010
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 2“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Betrachtet wird die Gleichung $x^4 = 4x+4$. Lösen Sie die folgenden Aufgaben a) bis c) ohne elektronische Hilfsmittel, für d) können Sie selbstverständlich solche Hilfsmittel benutzen.
   a) Ermitteln Sie auf grafischem Wege, wie viele reelle Lösungen diese Gleichung hat und wo diese ungefähr liegen!
   b) Nun soll die Gleichung näherungsweise mithilfe des Newtonverfahrens gelöst werden. Geben Sie die Iterationsvorschrift an und führen Sie vom Startwert $x_0 = 0$ ausgehend zwei Iterationsschritte aus!
   c) Wählen Sie einen zur Bestimmung einer anderen Lösung der Gleichung geeigneten Startwert und führen Sie von diesem ausgehend einen Iterationsschritt des Newtonverfahrens aus!
   d) Bestimmen Sie mithilfe des Newtonverfahrens alle Lösungen der Gleichung mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-8} ! Stellen Sie die dabei durchlaufenen Iterationspunkte tabellarisch dar!

2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:
   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{e^{3x}-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{e^{3x}}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\arctan x}{\frac{1}{x}}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{\sqrt{1+x^2}+\sin^2 x}$,
   f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1+x)}$, g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2+\sin^2 x}$!

3. Wie sind die Ausmaße eines zylindrischen Metalltrinkbechers zu wählen, damit er ein Fassungsvermögen von 400 mℓ hat und zu seiner Herstellung möglichst wenig Material benötigt wird? Wie groß ist der Materialverbrauch pro Becher in cm^2 ?

4. Durch die Beziehungen $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ werden die Funktionen Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus definiert.
   a) Untersuchen Sie die beiden Funktionen auf Monotonie, Extremwerte und Krümmungsverhalten!
   b) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sinh x$ im Punkt $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel!
   c) Wie lauten die Taylorpolynome dritten und vierten Grades $T_3(x,0)$ und $T_4(x,0)$ für $\sinh x$?
   d) Geben Sie die jeweiligen Lagrangeschen Restglieder an!
   e) Zeigen Sie mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes, dass für $|x| \le 1$ die Abschätzung $|T_4(x,0) - \sinh x| < 0.013$ gilt!
   f) Wie groß ist der Fehler bei Verwendung des Taylorpolynoms vierten Grades zur Berechnung von $\sinh 1$ tatsächlich?

5. Schätzen Sie ab, für welche Winkel φ bei der näherungsweisen Berechnung des Sinus durch den Ausdruck $\varphi - \dfrac{\varphi^3}{3!} + \dfrac{\varphi^5}{5!}$ die Fehlergrenze 10^{-6} eingehalten wird! Interpretieren Sie dabei den gegebenen Ausdruck als Taylorpolynom möglichst hohen Grades!

Aufgabenkomplex 2: Differenzialrechnung

Letzter Abgabetermin: 18. Mai 2010

---

1. Betrachtet wird die Gleichung $x^4 = 4x+4$. Lösen Sie die folgenden Aufgaben a) bis c) ohne elektronische Hilfsmittel, für d) können Sie selbstverständlich solche Hilfsmittel benutzen.

a) Ermitteln Sie auf grafischem Wege, wie viele reelle Lösungen diese Gleichung hat und wo diese ungefähr liegen!

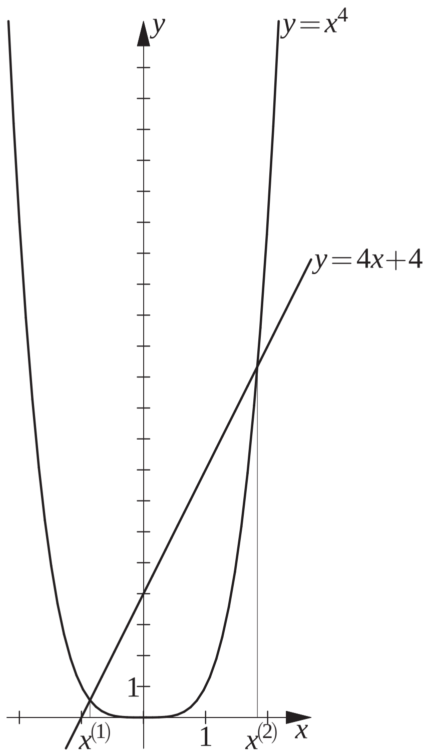
b) Nun soll die Gleichung näherungsweise mithilfe des Newtonverfahrens gelöst werden. Geben Sie die Iterationsvorschrift an und führen Sie vom Startwert $x_0 = 0$ ausgehend zwei Iterationsschritte aus!

c) Wählen Sie einen zur Bestimmung einer anderen Lösung der Gleichung geeigneten Startwert und führen Sie von diesem ausgehend einen Iterationsschritt des Newtonverfahrens aus!

d) Bestimmen Sie mithilfe des Newtonverfahrens alle Lösungen der Gleichung mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-8} ! Stellen Sie die dabei durchlaufenen Iterationspunkte tabellarisch dar!

Lösung:

a)



Offensichtlich hat die Gleichung $x^4 = 4x+4$ zwei reelle Lösungen und zwar zwischen -1 und 0 sowie zwischen 1 und 2. Genauer ist $x^{(1)} \approx -0.9$ und $x^{(2)} \approx 1.8$.

b) $x^4 = 4x+4 \iff f(x) = x^4 - 4x - 4 = 0$

Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x - 4}{4x_n^3 - 4}$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0 - \frac{-4}{-4} = -1,$$

$$x_2 = -1 - \frac{1}{-8} = -\frac{7}{8} = -0.875$$

c) (Da $f(x)$ für $x < 1$ streng monoton fallend und für $x > 1$ streng monoton wachsend ist, muss ein Startwert größer als 1 gewählt werden.)

z.B. $x_0 = 2, \quad x_1 = 2 - \frac{4}{28} = \frac{13}{7} \approx 1.857$

d)

B3 | =B2-(B2*B2*B2*B2-4*B2-4)/(4*B2*B2*B2-4)

	A	B	C
1	i	x1_i	x2_i
2	0	0,000000000	2,000000000
3	1	-1,000000000	1,857142857
4	2	-0,875000000	1,835548621
5	3	-0,862097953	1,835086890
6	4	-0,861982577	1,835086682
7	5	-0,861982568	1,835086682
8	6	-0,861982568	1,835086682

$x^{(1)} \approx -0.86198257, \quad x^{(2)} \approx -1.83508668$

2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{\frac{1}{x}}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{1+x^2}+\sin^2 x}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1+x)}$, g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+\sin^2 x}$!

Lösung:

a) $\frac{0}{0}$, l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x}{3e^{3x}}=\dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}}=\dfrac{0}{1}=0$

c) $\frac{0}{0}$, l'Hospital: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=-1$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{\pi}{2}}{0}=\infty$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{1+x^2}+\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{\sin^2 x}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{\sin x}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+\frac{\sin^2 x}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$

(Der Ausdruck hat die Form ∞/∞, die l'Hospitalsche Regel ist aber nicht anwendbar, da sich als Quotient der Ableitungen von Zähler und Nenner der für $x\to\infty$ unbestimmt divergierende Ausdruck $\dfrac{1+\cos x}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+2\sin x\cos x}$ ergibt.)

f) $\frac{0}{0}$, l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5e^{5x}}{\frac{1}{1+x}}=5$

g) $\frac{0}{0}$, l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2+\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x+2\sin x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x+\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2+2\cos 2x}=\dfrac{1}{4}$

---

3. Wie sind die Ausmaße eines zylindrischen Metalltrinkbechers zu wählen, damit er ein Fassungsvermögen von 400 mℓ hat und zu seiner Herstellung möglichst wenig Material benötigt wird? Wie groß ist der Materialverbrauch pro Becher in cm^2 ?

Lösung:

$V=\pi r^2 h=0.4\,\mathrm{dm}^3=400\,\mathrm{cm}^3,\ h=\dfrac{400}{\pi r^2},\ O=\pi r^2+2\pi r h=\pi r^2+\dfrac{800}{r}\to\min,$

$$O'=2\pi r-\frac{800}{r^2}\begin{cases}<0 & r<\sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} \quad \text{monoton fallend}\\ =0 & r=\sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} \quad \text{Minimum}\\ >0 & r>\sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} \quad \text{monoton wachsend}\end{cases}$$

minimaler Materialverbrauch bei $r=\sqrt[3]{\dfrac{400}{\pi}}\approx 5.03\,\mathrm{cm},\ h=\dfrac{400}{\pi\sqrt[3]{\frac{400^2}{\pi^2}}}=\sqrt[3]{\dfrac{400^3\pi^2}{\pi^3 400^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{400}{\pi}}=r,$

Materialverbrauch dabei $O=3\pi r^2\approx 238.6\,\mathrm{cm}^2$

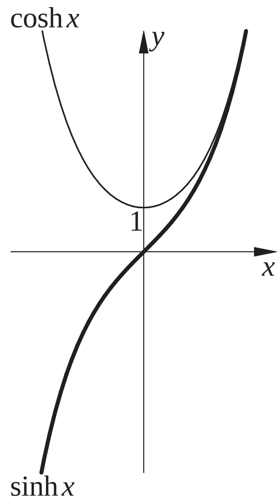
4. Durch die Beziehungen $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ werden die Funktionen Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus definiert.

a) Untersuchen Sie die beiden Funktionen auf Monotonie, Extremwerte und Krümmungsverhalten!
b) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sinh x$ im Punkt $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel!
c) Wie lauten die Taylorpolynome dritten und vierten Grades $T_3(x,0)$ und $T_4(x,0)$ für $\sinh x$?
d) Geben Sie die jeweiligen Lagrangeschen Restglieder an!
e) Zeigen Sie mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes, dass für $|x| \le 1$ die Abschätzung $|T_4(x,0) - \sinh x| < 0.013$ gilt!
f) Wie groß ist der Fehler bei Verwendung des Taylorpolynoms vierten Grades zur Berechnung von $\sinh 1$ tatsächlich?

Lösung:

a) $(\sinh x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \cosh x,$

$(\cosh x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \sinh x$



Offensichtlich gilt immer $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, während $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ für positive x positiv, für $x = 0$ gleich 0 und für negative x negativ ist.

Für $f(x) = \sinh x$ gilt somit:

$f'(x) = \cosh x = 0 \implies$ überall streng mon. wachsend, kein Extremwert

$$f''(x) = \sinh x = \begin{cases} < 0, & x < 0: \quad \text{konkav} \\ = 0, & x = 0 \\ > 0, & x > 0: \quad \text{konvex} \end{cases} \implies \text{Wendepunkt}$$

Für $g(x) = \cosh x$ gilt:

$$g'(x) = \sinh x = \begin{cases} < 0, & x < 0: \quad \text{monoton fallend} \\ = 0, & x = 0 \\ > 0, & x > 0: \quad \text{monoton wachsend} \end{cases} \implies \text{Minimum bei } \cosh 0 = 1$$

$g''(x) = \cosh x = 0 \implies$ überall konvex

b)
$$\begin{array}{llll} f(x) & = \sinh x & f(0) & = 0 \\ f'(x) & = \cosh x & f'(0) & = 1 \\ f''(x) & = \sinh x & f''(0) & = 0 \\ f'''(x) & = \cosh x & f'''(0) & = 1 \end{array}$$
usw. alternierend

$$f(x) = \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(Diese Reihe konvergiert für alle x gegen $\sinh x$, deshalb darf das Gleichheitszeichen gesetzt werden.)

c) Wegen $f^{(4)}(0) = 0$ gilt $T_3(x,0) = T_4(x,0) = x + \dfrac{x^3}{6}$.

d) $R_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 = \dfrac{\sinh \xi}{24} x^4$, $R_4(x) = \dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \dfrac{\cosh \xi}{120} x^5$, ξ zwischen 0 und x

e) $|T_4(x,0) - \sinh x| = |-R_4(x,0)| = |R_4(x,0)| = \dfrac{\cosh\xi}{120}|x|^5,$
ξ zwischen 0 und x.

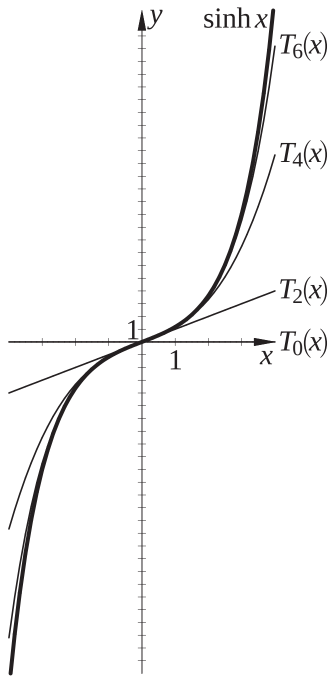
Wegen $|x| \le 1$ ist offensichtlich auch $|\xi| < 1$. Da der Kosinus Hyperbolicus eine gerade Funktion ist und für $x > 0$ monoton wächst, folgt $\cosh\xi < \cosh 1 = \dfrac{e + \frac{1}{e}}{2}$. Mit $|x| \le 1$ erhält man schließlich

$$|T_4(x,0) - \sinh x| = \frac{\cosh\xi}{120}|x|^5 < \frac{e + \frac{1}{e}}{240} \approx 0.0129.$$

Die gegebene Abschätzung ist also tatsächlich richtig.

f) $\sinh 1 = \dfrac{e + \frac{1}{e}}{2} \approx 1.17520, \quad T_4(x,0) = 1 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{6} \approx 1.166667,$
$T_4(x,0) - \sinh 1 \approx 0.00853.$

Der tatsächliche Fehler ist also deutlich kleiner. Er kann mit dem Restglied nicht besser abgeschätzt werden, da der tatsächliche Zwischenwert ξ nicht bekannt ist.



---

5. Schätzen Sie ab, für welche Winkel φ bei der näherungsweisen Berechnung des Sinus durch den Ausdruck $\varphi - \dfrac{\varphi^3}{3!} + \dfrac{\varphi^5}{5!}$ die Fehlergrenze 10^{-6} eingehalten wird! Interpretieren Sie dabei den gegebenen Ausdruck als Taylorpolynom möglichst hohen Grades!

Lösung:

Die Sinusfunktion hat am Entwicklungspunkt $\varphi_0 = 0$ die Taylorentwicklung

$$f(\varphi) = \sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

(Diese Taylorentwicklung konvergiert für alle φ gegen $\sin\varphi$, was aber für die gestellte Aufgabe nicht benötigt wird.)

Da wegen $f^{(6)}(0) = -\sin 0 = 0$ der Term mit der sechsten Potenz verschwindet, kann der gegebene Ausdruck als Taylorpolynom sechsten Grades $T_6(\varphi,0) = \varphi - \dfrac{\varphi^3}{3!} + \dfrac{\varphi^5}{5!}$ verstanden werden.

Der Approximationsfehler bestimmt sich mit dem Lagrangeschen Restglied dann zu

$$f(\varphi) - T_6(\varphi,0) = R_6(\varphi,0) = \frac{f^7(\overline{\varphi})}{7!}\varphi^7 = \frac{-\cos\overline{\varphi}}{5040}\varphi^7, \ \ \overline{\varphi} \text{ zwischen 0 und } \varphi.$$

Wegen $|\cos\overline{\varphi}| \le 1$ gilt $|R_6(\varphi,0)| \le \dfrac{|\varphi|^7}{5040}$. Der Fehler $R_6(\varphi,0)$ ist also mit Sicherheit betragsmäßig nicht größer als 10^{-6}, wenn $\dfrac{|\varphi|^7}{5040} \le 10^{-6}$, d.h. $|\varphi|^7 \le 0.00504$, $|\varphi| \lessapprox 0.4697 \approx 26.91^\circ$ gilt.

(Tatsächlich gilt z.B. $\sin 0.4697 = 0.4526187945$, $T_6(0.4697,0) = 0.4526197921$,
$R_6(0.4697,0) = \sin 0.4697 - T_6(0.4697,0) = -9.976 \cdot 10^{-7}$.)