Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

7. April 2010

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 1: Funktionen, Interpolation, Ableitung

Letzter Abgabetermin: 27. April 2010
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 1“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Berechnen Sie $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$!

2. Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{2}\lg(x-3)+\lg\frac{5}{2}=1-\lg\sqrt{x+3}$!

3. Sei $f(x)=\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}}$ eine reelle Funktion einer reellen Variablen.
   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich die Funktion $f(x)$, zeigen Sie, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt und ermitteln Sie diese Umkehrfunktion und ihren Definitions- und Wertebereich!
   b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion ohne Verwendung von Mitteln der Differenzialrechnung auf Monotonie!

4. Sei $f(x)=4x^2-4x+4$ und $g(x)=x-2$. Ermitteln Sie die Funktionen $(f\circ g)(x)$ und $(g\circ f)(x)$ sowie die Definitions- und Wertebereiche von f, g, $f\circ g$ und $g\circ f$!

5. Die Größen y_i hängen nach nebenstehender Tabelle von x ab. Nehmen Sie in den 5 Fällen die Lagrange-Interpolation vor! Skizzieren Sie die ermittelten Interpolationspolynome! Um was für Kurven handelt es sich? Welche Näherungswerte würden sich für $y_i(-0.5)$ ergeben? Kommentieren Sie die Ergebnisse!

x	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
-1	1	0	0	0	0
0	1	2	2	2	2
1	1	4	6	6	12
2	1	6	12	18	126

6. Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:
   a) $f(x)=\left(e^{2x+3}+4x+5\right)^6$, b) $f(x)=(\sin^2 x+1)(\ln x+2)$, c) $f(x)=e^{\frac{x^2+3}{x^2+1}}$,
   d) $f(x)=\ln\sqrt{x^3\,e^{2x}\ln x}$!

Aufgabenkomplex 1: Funktionen, Interpolation, Ableitung

Letzter Abgabetermin: 27. April 2010

---

1. Berechnen Sie $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$!

Lösung:

$\mathrm{DB}(\operatorname{arccot}) = \mathbb{R}$, $\mathrm{WB}(\operatorname{arccot}) = (0, \pi)$ (eine Periode des Kotangens)

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} = -\sqrt{3} \iff \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dies wäre für $x = -\frac{\pi}{6}$ erfüllt. Allerdings liegt dieser Wert nicht im Wertebereich des Arkuskotangens. Um in diesen zu gelangen, muss eine Periodenlänge des Kotangens addiert werden, so dass sich $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$ ergibt.

---

2. Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{2}\lg(x-3) + \lg\frac{5}{2} = 1 - \lg\sqrt{x+3}$!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\lg(x-3) + \lg\frac{5}{2} &= 1 - \lg\sqrt{x+3}\\
\lg\sqrt{x+3} + \lg\sqrt{x-3} + \lg\frac{5}{2} &= 1\\
\lg\frac{5}{2}\sqrt{x^2-9} &= 1\\
\frac{5}{2}\sqrt{x^2-9} &= 10\\
\sqrt{x^2-9} &= 4\\
x^2-9 &= 16\\
x^2 &= 25\\
x &= \pm 5, \quad x=-5 \text{ scheidet aus, da } \lg(-8) \text{ und } \lg(-2) \text{ nicht definiert}\\
&\underline{\underline{x = 5}}
\end{aligned}$$

---

3. Sei $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}}$ eine reelle Funktion einer reellen Variablen.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich die Funktion $f(x)$, zeigen Sie, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt und ermitteln Sie diese Umkehrfunktion und ihren Definitions- und Wertebereich!

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion ohne Verwendung von Mitteln der Differenzialrechnung auf Monotonie!

Lösung:

a) Damit beide Wurzeln existieren, müssen beide Radikanden nichtnegativ sein. Das ist für $x \geq 2$ erfüllt. Da der Nenner genau dann gleich 0 ist, wenn $x = 2$ gilt, ergibt sich $\mathrm{DB}(f) = (2, \infty)$.

Die Gleichung $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}}$ soll nun nach x aufgelöst werden. Da die rechte Seite nicht negativ werden kann, muss $y \geq 0$ sein.

Für $y \geq 0$ gilt $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}} \iff y^2 = \dfrac{2x-1}{x-2} \iff (x-2)y^2 = 2x-1$. (Auch die letzte Gleichung ist für $x-2=0$ nicht erfüllt, denn sonst wäre auch $2x-1=0$ und damit $x=2=\frac{1}{2}$.)

Weiter ist $(x-2)y^2=2x-1 \iff xy^2-2y^2=2x-1 \iff x(y^2-2)=2y^2-1 \iff x=\dfrac{2y^2-1}{y^2-2}$. (Auch die vorletzte Gleichung ist für $y^2-2=0$ nicht erfüllt, denn sonst wäre auch $2y^2-1=0$ und damit $y^2=2=\frac{1}{2}$.)

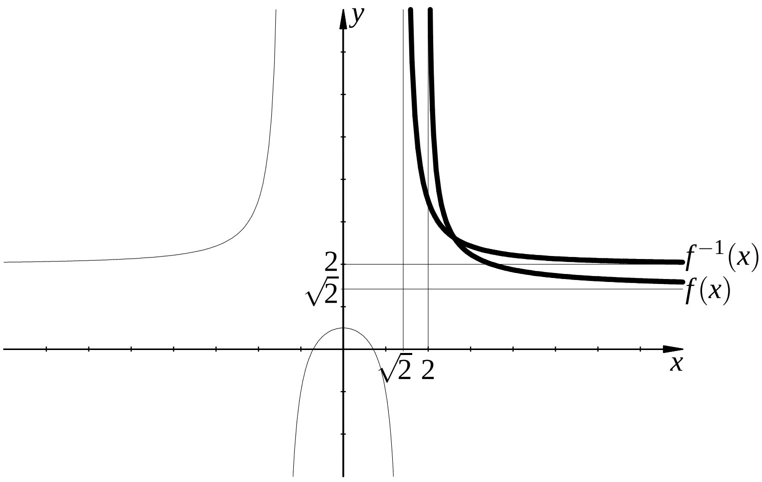
Wegen $\mathrm{DB}(f)=(2,\infty)$ muss hierbei $x>2$ gelten. Da y nichtnegativ und wegen $y^2-2\neq 0$ ungleich $\sqrt{2}$ sein muss, müssen die Fälle $0\leq y<\sqrt{2}$ und $y>\sqrt{2}$ unterschieden werden:

$\underline{0\leq y<\sqrt{2}}$: $y^2-2<0$, $x=\dfrac{2y^2-1}{y^2-2}>2 \iff 2y^2-1<2y^2-4 \iff -1<-4$, Widerspruch.
Diese y sind also nicht möglich, denn für sie gilt nicht $x>2$.

$\underline{y>\sqrt{2}}$: $y^2-2>0$, $x=\dfrac{2y^2-1}{y^2-2}>2 \iff 2y^2-1>2y^2-4 \iff -1>-4$, immer erfüllt.
Für diese y ergibt sich immer ein $x>2$.

Zu jedem $y>\sqrt{2}$ lässt sich also eindeutig $x=\dfrac{2y^2-1}{y^2-2}>2$ errechnen, d.h., derselbe Funktionswert $y=f(x)$ kann nicht zu verschiedenen Argumenten gehören, die für $x>2$ definierte Funktion $f(x)$ ist eineindeutig und besitzt damit eine Umkehrfunktion.

Formales Vertauschen der Variablen führt auf $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2-2}$
mit $\mathrm{DB}(f^{-1})=(\sqrt{2},\infty)=\mathrm{WB}(f)$ und $\mathrm{WB}(f^{-1})=(2,\infty)=\mathrm{DB}(f)$.



(Bei den in der Abbildung schwach gezeichneten Kurven handelt es sich um die Fortsetzung von $g(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2-2}$ außerhalb des Definitionsbereichs von $f^{-1}(x)$, also um keinen Bestandteil der Umkehrfunktion.)

b) Da die Funktionswerte $y=f(x)$ positiv sind und $x-2>0$ ist, gilt

$$y_1<y_2 \iff \frac{\sqrt{2x_1-1}}{\sqrt{x_1-2}}<\frac{\sqrt{2x_2-1}}{\sqrt{x_2-2}} \iff \frac{2x_1-1}{x_1-2}<\frac{2x_2-1}{x_2-2}$$
$$\iff (2x_1-1)(x_2-2)<(2x_2-1)(x_1-2)$$
$$\iff 2x_1x_2-4x_1-x_2+2<2x_2x_1-4x_2-x_1+2 \iff 3x_2<3x_1 \iff x_1>x_2.$$

Da es sich durchgehend um äquivalente Umformungen handelt, sind sowohl $f(x)$ als auch $f^{-1}(x)$ streng monoton fallend.

4. Sei $f(x)=4x^2-4x+4$ und $g(x)=x-2$. Ermitteln Sie die Funktionen $(f\circ g)(x)$ und $(g\circ f)(x)$ sowie die Definitions- und Wertebereiche von f, g, $f\circ g$ und $g\circ f$!

Lösung:

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 4(x-2)^2-4(x-2)+4 = 4x^2-16x+16-4x+8+4 = 4x^2-20x+28$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = (4x^2-4x+4)-2 = 4x^2-4x+2,$$

$$f(x) = 4x^2-4x+4 = 4(x^2-x+1) = 4\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1\right) = 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3,$$

$\mathrm{DB}(f)=\mathbb{R},\ \mathrm{WB}(f)=[3,\infty)$

$g(x)=x-2: \quad \mathrm{DB}(g)=\mathrm{WB}(g)=\mathbb{R}$

$$(f\circ g)(x) = 4x^2-20x+28 = 4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-25+28 = 4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+3,$$

$\mathrm{DB}(f\circ g)=\mathbb{R},\ \mathrm{WB}(f\circ g)=[3,\infty)$

$$\mathbb{R} \xrightarrow[g]{} \mathbb{R} \xrightarrow[f]{} [3,\infty)$$

$$(g\circ f)(x) = 4x^2-4x+2 = 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1+2 = 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1,$$

$\mathrm{DB}(g\circ f)=\mathbb{R},\ \mathrm{WB}(g\circ f)=[1,\infty)$

$$\mathbb{R} \xrightarrow[f]{} [3,\infty) \xrightarrow[g]{} [1,\infty)$$

$$3-2=1$$

---

5. Die Größen y_i hängen nach nebenstehender Tabelle von x ab. Nehmen Sie in den 5 Fällen die Lagrange-Interpolation vor! Skizzieren Sie die ermittelten Interpolationspolynome! Um was für Kurven handelt es sich? Welche Näherungswerte würden sich für $y_i(-0.5)$ ergeben? Kommentieren Sie die Ergebnisse!

x	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
−1	1	0	0	0	0
0	1	2	2	2	2
1	1	4	6	6	12
2	1	6	12	18	126

Lösung:

$$P_3(x)=y(-1)\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)}+y(0)\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)}+y(1)\frac{(x+1)x(x-2)}{2\cdot 1(-1)}+y(2)\frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=-\frac{y(-1)}{6}(x^3-3x^2+2x)+\frac{y(0)}{2}(x^3-2x^2-x+2)-\frac{y(1)}{2}(x^3-x^2-2x)+\frac{y(2)}{6}(x^3-x)$$

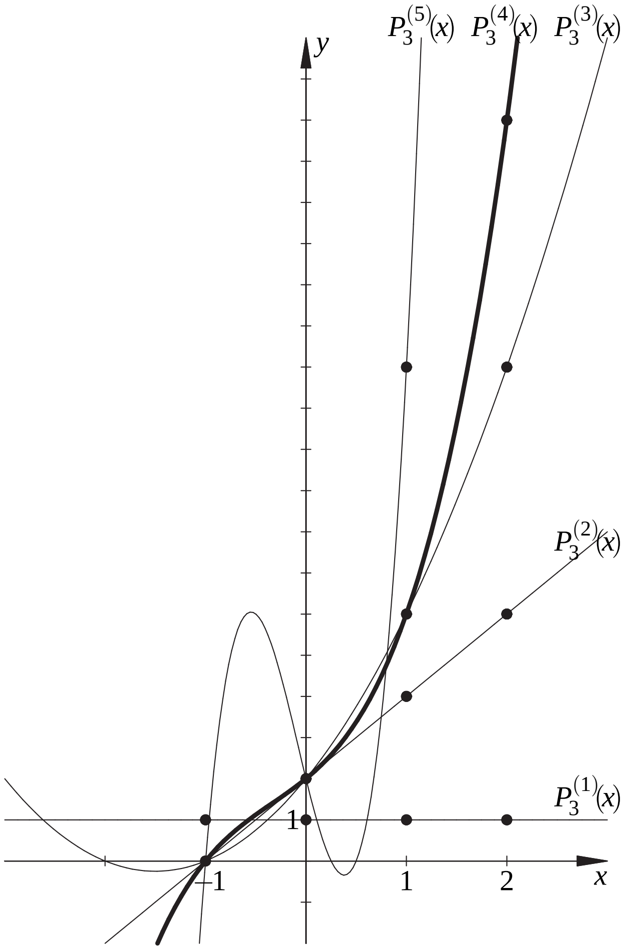
zu y_1: $P_3^{(1)}(x)=-\frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x)+\frac{1}{2}(x^3-2x^2-x+2)-\frac{1}{2}(x^3-x^2-2x)+\frac{1}{6}(x^3-x)=1$

zu y_2: $P_3^{(2)}(x)=(x^3-2x^2-x+2)-2(x^3-x^2-2x)+(x^3-x)=2x+2$

zu y_3: $P_3^{(3)}(x)=(x^3-2x^2-x+2)-3(x^3-x^2-2x)+2(x^3-x)=x^2+3x+2$

zu y_4: $P_3^{(4)}(x)=(x^3-2x^2-x+2)-3(x^3-x^2-2x)+3(x^3-x)=x^3+x^2+2x+2$

zu y_5: $P_3^{(5)}(x)=(x^3-2x^2-x+2)-6(x^3-x^2-2x)+21(x^3-x)=16x^3+4x^2-10x+2$



$P_3^{(1)}$: Konstante, $P_3^{(1)}(-0.5)=1$

$P_3^{(2)}$: Gerade, $P_3^{(2)}(-0.5)=1$

$P_3^{(3)}$: Parabel, $P_3^{(3)}(-0.5)=0.75$

$P_3^{(4)}$: kubische Funktion, $P_3^{(4)}(-0.5)=1.125$

$P_3^{(5)}$: kubische Funktion, $P_3^{(5)}(-0.5)=6$

Im Fall $P_3^{(5)}(x)$ oszilliert die kubische Funktion, so dass die kubische Interpolation zur Bestimmung eines Näherungswertes für $y_5(-0.5)$ vermutlich ungeeignet ist.

(Ob der konkave Verlauf der kubischen Funktion $P_3^{(4)}(x)$ zwischen den Stützstellen -1 und 0 für eine Näherungsrechnung sinnvoll ist, sei dahingestellt.)

---

6. Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x)=\left(e^{2x+3}+4x+5\right)^6$, b) $f(x)=(\sin^2 x+1)(\ln x+2)$, c) $f(x)=e^{\frac{x^2+3}{x^2+1}}$,

d) $f(x)=\ln\sqrt{x^3\,e^{2x}\ln x}$!

Lösung:

a) $f'(x)=6\left(e^{2x+3}+4x+5\right)^5\left(2e^{2x+3}+4\right)$

b) $f'(x)=2\sin x\cos x\,(\ln x+2)+\dfrac{\sin^2 x+1}{x}$

c) $f'(x)=e^{\frac{x^2+3}{x^2+1}}\cdot\dfrac{2x\,(x^2+1)-(x^2+3)\,2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}\,e^{\frac{x^2+3}{x^2+1}}$

d) $f(x)=\ln\sqrt{x^3\,e^{2x}\ln x}=\dfrac{1}{2}\ln(x^3\,e^{2x}\ln x)=\dfrac{1}{2}(\ln x^3+\ln e^{2x}+\ln\ln x)=\dfrac{3}{2}\ln x+x+\dfrac{1}{2}\ln\ln x$,

$f'(x)=\dfrac{3}{2x}+1+\dfrac{1}{2x\ln x}$