Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

04. Juni 2010

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 4: Vektorfunktionen, Differenzialgleichungen, Eigenwertprobleme

Letzter Abgabetermin: 22. Juni 2010
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 4“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Betrachtet werden die Kurven $\vec{x}_1(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\y_1(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh t\\\sinh t\end{pmatrix}$, $\vec{x}_2(t)=\begin{pmatrix}x_2(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}$ und $\vec{x}_3(t)=\begin{pmatrix}x_3(t)\\y_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cosh t\\\sinh t\end{pmatrix}$ jeweils für $t\in\mathbb{R}$.
   a) Zeigen Sie, dass $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ gilt! Welches Analogon hat diese Beziehung für Winkelfunktionen?
   b) Berechnen Sie die Tangentenvektoren für die drei Kurven!
   c) Geben Sie mithilfe der Beziehungen aus a) parameterfreie Gleichungen der drei Kurven an!
   d) Stellen Sie die drei Kurven grafisch dar! Wie oft werden die Kurven für $-\infty<t<\infty$ durchlaufen?
   e) Beschreiben Sie die in der oberen Halbebene (einschließlich x-Achse) gelegenen Teile der drei Kurven als Funktionen $y=f_i(x)$, $i=1,2,3$!
   f) Berechnen Sie für die drei Funktionen die Ableitung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ zum einen mithilfe der Formel $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$ aus $\vec{x}\,'(t)$, zum anderen als $f'(x)$!
   g) Die Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ und $f_3(x)$ sollen zu einer einheitlichen über der gesamten x-Achse definierten Funktion zusammengefasst werden. Beschreiben Sie diese Funktion durch einen einheitlichen Ausdruck!
   h) Berechnen Sie die Gleichungen der Tangenten an die gegebenen Kurven in den Punkten $(1/2,\sqrt{3}/2)$, $(1,0)$ und $(2,\sqrt{3})$ und zeichnen Sie die Tangenten in das Bild aus d) ein!

2. a) Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}-2+5\cos t\\3+5\sin t\\t\end{pmatrix}$? Skizzieren Sie die Kurve!
   b) Ermitteln Sie den Durchstoßpunkt der Kurve durch die x-y-Ebene und die Gleichung der Tangente in diesem Punkt!
   c) In welchem Winkel schneidet die Kurve die x-y-Ebene?

3. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y'=\frac{(x+29)y}{x^2+3x-28}$!

4. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y'-2\frac{y}{x}=x^2$, $y(1)=4$!

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix}11&12\\-8&-9\end{pmatrix}$ und führen Sie die Diagonalisierung mithilfe der Matrix aus den Eigenvektoren rechnerisch aus!