Technische Universität Chemnitz 27. April 2010
Fakultät für Mathematik

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 2: Differenzialrechnung

Letzter Abgabetermin: 18. Mai 2010
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 2“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Betrachtet wird die Gleichung $x^4 = 4x + 4$. Lösen Sie die folgenden Aufgaben a) bis c) ohne elektronische Hilfsmittel, für d) können Sie selbstverständlich solche Hilfsmittel benutzen.
   a) Ermitteln Sie auf grafischem Wege, wie viele reelle Lösungen diese Gleichung hat und wo diese ungefähr liegen!
   b) Nun soll die Gleichung näherungsweise mithilfe des Newtonverfahrens gelöst werden. Geben Sie die Iterationsvorschrift an und führen Sie vom Startwert $x_0 = 0$ ausgehend zwei Iterationsschritte aus!
   c) Wählen Sie einen zur Bestimmung einer anderen Lösung der Gleichung geeigneten Startwert und führen Sie von diesem ausgehend einen Iterationsschritt des Newtonverfahrens aus!
   d) Bestimmen Sie mithilfe des Newtonverfahrens alle Lösungen der Gleichung mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-8} ! Stellen Sie die dabei durchlaufenen Iterationspunkte tabellarisch dar!

2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:
   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{e^{3x}-1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{e^{3x}}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{\frac{1}{x}}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{\sqrt{1+x^2}+\sin^2 x}$,
   f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{5x}-1}{\ln(1+x)}$, g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2+\sin^2 x}$!

3. Wie sind die Ausmaße eines zylindrischen Metalltrinkbechers zu wählen, damit er ein Fassungsvermögen von 400 mℓ hat und zu seiner Herstellung möglichst wenig Material benötigt wird? Wie groß ist der Materialverbrauch pro Becher in cm^2 ?

4. Durch die Beziehungen $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ werden die Funktionen Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus definiert.
   a) Untersuchen Sie die beiden Funktionen auf Monotonie, Extremwerte und Krümmungsverhalten!
   b) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sinh x$ im Punkt $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel!
   c) Wie lauten die Taylorpolynome dritten und vierten Grades $T_3(x,0)$ und $T_4(x,0)$ für $\sinh x$?
   d) Geben Sie die jeweiligen Lagrangeschen Restglieder an!
   e) Zeigen Sie mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes, dass für $|x| \le 1$ die Abschätzung $|T_4(x,0) - \sinh x| < 0.013$ gilt!
   f) Wie groß ist der Fehler bei Verwendung des Taylorpolynoms vierten Grades zur Berechnung von $\sinh 1$ tatsächlich?

5. Schätzen Sie ab, für welche Winkel φ bei der näherungsweisen Berechnung des Sinus durch den Ausdruck $\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!}$ die Fehlergrenze 10^{-6} eingehalten wird! Interpretieren Sie dabei den gegebenen Ausdruck als Taylorpolynom möglichst hohen Grades!