Technische Universität Chemnitz 23. Februar 2009
Fakultät für Mathematik

Höhere Mathematik I.2 für Bachelorstudiengänge / Mathematik für Chemiker II

Prüfungsklausur

Allgemeine Hinweise: Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten!
Schreiben Sie alle wesentlichen Schritte auf dem Weg zum Ergebnis nachvollziehbar auf!

Zugelassene Hilfsmittel: gedruckte Formelsammlungen, Vorlesungsskripts der beiden Semester, Arbeitsblätter zur Vorlesung, beliebige Taschenrechner

1. (8 Punkte)
Bestimmen Sie mit Mitteln der Analytischen Geometrie den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene durch die Punkte $(1,1,1)$, $(2,3,3)$ und $(2,3,4)$ sowie den Punkt der Ebene, in dem der Abstand realisiert wird!

2. (4 Punkte)
Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & a \\ 3 & b & 9 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von den Parametern a und b !

3. (8 Punkte)
a) Führen Sie für die Kurve $13x_1^2 - 10x_1x_2 + 13x_2^2 = 288$ die Hauptachsentransformation aus und klassifizieren Sie sie!
b) Zeichnen Sie die Kurve im transformierten Koordinatensystem!

4. (8 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = (x-6)^2 + (x+2)y^2 + 10$ auf stationäre Punkte und Extremwerte!

5. (12 Punkte)
Aus Trauben-, Orangen- und Apfelsaft werden 3 verschiedene Sorten Multivitaminsaft hergestellt. 5 ℓ Multivitaminsaft enthalten bei der Sorte A 1 ℓ Trauben-, 3 ℓ Orangen- und 1 ℓ Apfelsaft, bei der Sorte B 4 ℓ Orangen- und 1 ℓ Apfelsaft und bei der Sorte C 3 ℓ Orangen- und 2 ℓ Apfelsaft. Pro Liter wird ein Gewinn von 20 Cent bei Sorte A, 15 Cent bei Sorte B und 10 Cent bei Sorte C erzielt. Es stehen 500 ℓ Trauben-, 1750 ℓ Orangen- und 550 ℓ Apfelsaft zur Verfügung.
Stellen sie das mathematische Modell für die Maximierung des Gewinns auf und lösen Sie dieses mit dem Simplexverfahren! Wieviel Liter der einzelnen Sorten sind herzustellen? Welche Bedeutung haben die Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Zusatz (+5 Punkte)
Bestimmen Sie den Punkt der Ebene $2x-y=1$, der dem Koordinatenursprung am nächsten liegt, durch Lösung einer Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung!
Hinweis: Es ist zweckmäßig, die Extrema des Quadrats des Abstands vom Koordinatenursprung zu bestimmen!