

Aufgabenkomplex 5: Folgen und Reihen, Finanzmathematik

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 5“ kennzeichnen.

(Abgabe in Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)

Elektronische Hilfsmittel dürfen nur bei den Aufgaben 1g, 4 und 5 verwendet werden.

1. Untersuchen Sie in folgenden Fällen, ob die Folgen (a-e) und die Reihen (f-h) konvergieren, bestimmt oder unbestimmt divergieren, und geben Sie ggf. die Grenzwerte an:

a)

$$a_n = \sqrt[n]{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

b)

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2}{(2n+3)^2}$$

c)

$$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

d)

$$a_n = n \cdot \left(1 - (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)$$

e)

$$a_n = \frac{4^{n+1} + 5^n}{5^n + 27,3} + \sqrt[n]{4}$$

f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{5n^2 + 3n + 7}$$

g)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{ne}}{e^{n\pi}}$$

h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^n$$

2. a_0 , a_1 und a_2 seien die ersten Glieder einer geometrischen Folge, b_0 , b_1 und b_2 die einer arithmetischen Folge. Bestimmen Sie die Bildungsgesetze der beiden Folgen, wenn bekannt ist, dass $a_0 = b_0 = 3$, $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2 + 12$ ist.

3. Bakterienwachstum: Am Anfang ($t = 0$) gibt es $a_0 = 1000$ Bakterien. Nach einer Stunde sind es 2000. Stellen Sie die allgemeine Wachstumsformel auf und bestimmen Sie die Stammgröße nach einem Tag. Ressourcen sind natürlich genug da.

4. Im Rahmen Ihrer Altersvorsorge überlegen Sie den Abschluss einer privaten Rentenversicherung, in die Sie vom 25. bis zum 60. Lebensjahr einen bestimmten Betrag einzahlen wollen. Durch die jährlichen Einzahlungen wollen Sie erreichen, dass Ihnen die private Rentenversicherung am Ende des 65. Lebensjahres einen Betrag von 300.000,00 € auszahlen kann.

a)

Welchen Betrag müssen Sie dann jährlich vorschüssig in eine Rentenversicherung einzahlen, wenn Sie mit Ihren Zahlungen am Beginn des 25. Lebensjahres beginnen? ($p = 3,25\%$) (Hinweis: Die letzte Einzahlung erfolgt am Beginn des 60. Lebensjahres)

b)

In welchem Jahr müssten Sie mit der ersten vorschüssigen Einzahlung beginnen, wenn Sie jährlich einen Betrag von 5570,47€ einzahlen könnten. ($p = 3,25\%$) (Hinweis: Das Guthaben am Ende des 65. Lebensjahres soll wieder 300.000,00 € betragen.)

c)

Unterstellen wir, dass Sie erste Zahlungen aus der Rentenversicherung erst am Beginn des 68. Lebensjahres in Anspruch nehmen. Welcher Betrag kann Ihnen dann jährlich vorschüssig 10 Jahre lang ausgezahlt werden, wenn das angesammelte Guthaben aufgebraucht werden soll? ($p = 3,25\%$) (Hinweis: Das Guthaben am Ende des 65. Lebensjahres soll wieder 300.000,00 € betragen.)

5. Ihr Großvater kann in diesem Jahr noch mit 65 Jahren in Rente gehen. Mit Beginn der gesetzlichen Rentenzahlung wird auch eine private Rentenversicherung fällig. Die Versicherung hat ihrem Großvater das Angebot unterbreitet, das angesammelte Guthaben in Form einer vorschüssigen Jahresrente über 6.000,00 € mit einer Laufzeit von 10 Jahren auszuzahlen. Der Großvater bittet Sie ihm auszurechnen, wie viel Jahre eine nachschüssige Rente in Höhe von 7.840,00 € ausgezahlt werden könnte. ($p = 6\%$)