

**Aufgabenkomplex 4: Inverse Matrix, Determinanten, Analytische Geometrie**

**Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 4“ kennzeichnen.**

(Abgabe in Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)

1. Im folgenden sind die Matrizen  $A, B, C, E$  und  $X$  quadratisch vom gleichen Rang. Berechnen Sie jeweils die Matrix  $X$ .

a)

$$A \cdot X + 2B = 3(X + C)$$

b)

$$2A \cdot X + 3B = 4(X - C)$$

c)

$$3A \cdot X - 4B = X - C$$

d)

$$(A \cdot X^T)^T - X \cdot B + 3X = E$$

e)

$$2A \cdot X + B \cdot X - 3C = 2(X - C) + 3B$$

f)

$$(X \cdot B) \cdot (A \cdot X \cdot B)^{-1} = E$$

2. Gegeben sei die  $3 \times 3$ -Matrix  $A$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

und  $a, b, c \in \mathbb{R}$  beliebig.

a)

Berechnen Sie  $\det A$ .

b)

Setzen Sie nun speziell  $a = 1, b = 2$  und  $c = 3$ . Zeigen Sie, dass die zugehörige Matrix invertierbar ist und berechnen Sie diese.

3. Ergänzen Sie in den folgenden beiden Matrizen die fehlenden Matrixelemente so, dass die Determinante den angegebenen Wert hat. Geben Sie eine der Matrizen mit diesem Determinantenwert an.

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \dots & \dots & -4 \\ \dots & \dots & 3 \end{pmatrix}, \quad \det A = 30$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \det B = 0$$

4. Gegeben sei die reelle  $4 \times 4$  Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 7 & 5 \\ -2 & 1 & t & 8 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

für allgemeines  $t \in \mathbb{R}$ . Für welche  $t$  ist  $A$  invertierbar? Berechnen Sie  $A^{-1}$  für  $t = 1$ .

5. Auf einer Böschung sollen die Geländepunkte  $A$  und  $B$  sowie  $B$  und  $C$  durch geradlinige Wege verbunden werden. Die Lage dieser Punkte ist in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben:  $A(-4|2|1)$ ,  $B(-3|7|2)$ ,  $C(-5|9|3)$ . Die  $x_1x_2$ -Ebene sei die Horizontalebene. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 10 m.

- a) Berechnen Sie die Gesamtlänge der Wege sowie das Gradmaß des Winkels  $\alpha$  zwischen den Wegen.
- b) Die Lage der Böschung kann in dem zu betrachtenden Bereich durch eine Ebene  $E$  charakterisiert werden. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene  $E$ .
- c) Der Geländepunkt  $\bar{B}(0|10|2)$  liegt auf der gleichen Höhenlinie  $h$  wie der Geländepunkt  $B$ . Geben Sie eine Gleichung dieser Höhenlinie an. (Anmerkung: Eine Höhenlinie besteht aus Geländepunkten mit gleicher Höhe.) Zeigen Sie, dass der Weg zwischen  $B$  und  $C$  orthogonal zur Höhenlinie  $h$  verläuft. Ermitteln Sie die Höhendifferenz zwischen den Punkten  $B$  und  $C$ , und berechnen Sie das Gradmaß des Neigungswinkels  $\beta$  der Böschung (bez. der Horizontalebene).