Aufgabenkomplex 3: Lineare Gleichungssysteme, Rang

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 3" kennzeichnen.
(Abgabe in Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)

1. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7a - 3b + Rc &= 29 \\ 70a + 2b + 5c &= R \\ 19a + b + 16c &= 41 \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems!

b) Für welche R erhalten wir unendlich viele Lösungen?

2. Für welche Werte des reellen Parameters α besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + \alpha x_2 &= 3 \\ x_1 + 2\alpha x_3 + x_4 &= 5\alpha \\ 2x_3 + x_4 &= 1 - 2\alpha \\ -2x_1 + 4x_3 + \alpha x_4 &= 2 + \alpha \end{aligned}$$

a) unendlich viele Lösungen?

b) keine Lösung?

c) genau eine Lösung?

d) Man berechne die Lösung für $\alpha = -1$.

3. Gärtner Rettich will für seine neue Blumenzüchtung Tulpenrose Spezialdünger herstellen, der 35% Kalium, 40% Phosphor und 25% Stickstoff enthalten soll. Zum Mischen stehen ihm drei Düngersorten zur Verfügung:

Sorte A enthält 50% Kalium, 40% Phosphor und 10% Stickstoff.

Sorte B enthält 20 % Kalium, 30% Phosphor und 50% Stickstoff.

Sorte C enthält 30% Kalium, 50% Phosphor und 20% Stickstoff.

Wieviel kg der Sorten A, B und C muss er verwenden, um 20 kg des neuen Düngers herzustellen?

4. Es seien $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rang}(A)$, $\operatorname{rang}(A|\vec{b})$ und $\operatorname{rang}(A|\vec{c})$

b)
Bestimmen Sie die Zahl der frei wählbaren Parameter in der allgemeinen Lösung des homogenen Gleichungssystems

$$U := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^6 | A\vec{x} = \vec{0}\}$$

und lösen Sie das homogene Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$.

5. Es seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^4$ gegeben:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 42 \\ -41 \\ 40 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 19 \\ -13 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 10 \\ -23 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Dimension und Basis der linearen Hülle $v_1, \ldots, v_5$.