Aufgabenkomplex 2: Vektoren, Matrizen

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 2” kennzeichnen.
(Abgabe in Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)

1. Gegeben ist der Vektor $\vec{a}$. Geben Sie die Koordinaten der Vektoren $\vec{a_{12}}$, $\vec{a_{23}}$, $\vec{a_{13}}$ und $\vec{a_0}$ an, die man durch Spiegelung von $\vec{a}$ an der x_1-x_2-, x_2-x_3- und x_1-x_3-Ebene und am Koordinatenursprung erhält.

a)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \text{ mit } a_1, a_2 \text{ und } a_3 \in \mathbb{R}.$$

2. Bestimmen Sie alle möglichen Faktoren r, s und $t \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Gleichungen erfüllt sind.

a)
$$r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)
$$r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c)
$$r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

a)

Bestimmen Sie die Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 der Ebene E mit den Koordinatenachsen. Berechnen Sie das Verhältnis, in welchem die Gerade g die Strecke $\overline{S_2S_3}$ teilt.

b)

Auf der Strecke $\overline{S_1S_2}$ liegen die Punkte P und Q. Berechnen Sie die Koordinaten von P und Q so, dass das Dreieck PQS_3 mit der Grundseite PQ gleichschenklig ist und einen Flächeninhalt von $3\sqrt{17}$ FE hat.

c)

Das Dreieck $S_1S_2S_3$ ist die Grundfläche einer senkrechten Pyramide mit der Höhe $4\sqrt{17}$. Der Fußpunkt der Pyramidenhöhe ist der Schwerpunkt des Dreiecks $S_1S_2S_3$. Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen Spitzen der Pyramide.

4. Sei
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$
Überzeugen Sie sich davon, dass $A^3 - 3A^2 + 4E = 0$ (dabei bezeichnet 0 die (3×3)-Nullmatrix und E die (3×3)-Einheitsmatrix) gilt und verwenden Sie diese Gleichung zur Berechnung von A^{-1}, indem Sie die Gleichung nach E auflösen und danach A ausklammern.

5. Berechnen Sie a, b, c, d, e, f in der Matrizengleichung
$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -7 \\ 4 & -7 & 38 \end{pmatrix}$$

6. Überprüfen Sie, welche der nachfolgenden Matrizen miteinander multipliziert oder addiert werden können und bilden Sie alle möglichen Summen und Produkte:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$f = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } G = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
Hinweis: Wir erhalten 13 verschiedene Matrizen! Beachten Sie: Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ, die Matrixaddition hingegen schon!