

Höhere Mathematik I.1

Übung 14: Folgen und Reihen

1. Ein auf 100°C erhitzter Körper habe nach n Minuten die Temperatur $T_n = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{n}{10}} [^\circ\text{C}]$.
- Zeigen Sie mithilfe der Definition der Konvergenz einer Zahlenfolge, dass die Temperatur des Körpers gegen die (Umgebungs-)Temperatur von 20°C konvergiert.
 - Ermitteln Sie, nach wieviel Minuten die Temperatur des Körpers unter 25°C , 20.5°C , 20.05°C bzw. 20.005°C gefallen ist!

2. Mit welchem Zinssatz muss Kapital angelegt werden, damit es sich in 20 Jahren verdreifacht?

3. Untersuchen Sie in folgenden Fällen, ob die Folgen (a_n) konvergieren, bestimmt oder unbestimmt divergieren, und geben Sie ggf. die Grenzwerte an:

a) $a_n = (-0.99999)^n$, b) $a_n = (-1.00001)^n$, c) $a_n = 1.00001^n$,
d) $a_n = \frac{0.01n^6 + 0.1n^5}{100n^5 + 500n^4 + 200}$, e) $a_n = \frac{2n^5 + 3n^4 + 4n^2 + 7}{(3n+1)^2(4n^3 - 3n^2 + n + 3)}$, f) $a_n = \frac{n^2 + 9n + 4}{\sqrt[4]{n^9} + 2n + 1} !$

4. Berechnen Sie mit der Formel für die Partialsumme der geometrischen Reihe

a) $\sum_{n=0}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$, b) $\sum_{n=1}^8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$, c) $\sum_{n=9}^{16} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, d) $\sum_{n=0}^8 \left(\frac{3}{2}\right)^n$, e) $\sum_{n=9}^{16} \left(\frac{3}{2}\right)^n !$

5. Ermitteln Sie in folgenden Fällen, ob die Folgen (a_n) und die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergieren:

a) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, b) $a_n = \frac{99^n}{100^n}$, c) $a_n = \frac{101^n}{100^n}$, d) $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, e) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$,

f) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) !$

Bestimmen Sie im Konvergenzfall die Grenzwerte bzw. Summen!