Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

20. Dezember 2011

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 5: Inverse Matrix, Determinanten, Analytische Geometrie

Letzter Abgabetermin: 23. Januar 2012
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 5“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!
Alle Aufgaben sind ohne elektronische Hilfsmittel zu lösen!

1. Seien a und b beliebige reelle Parameter. Berechnen Sie $\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 & -1 \end{vmatrix}$!

   Für welche Parameterwerte verschwindet die Determinante?

2. Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$.
   a) Berechnen Sie $\det(\boldsymbol{A})$ und $\boldsymbol{A}^{-1}$ in Abhängigkeit vom Parameter a !
   b) Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem
   $$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ 2x+y+3z &= 7 \\ 3x+y+5z &= 12 \end{aligned} \quad !$$

3. Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$!

4. Betrachtet werden die Dreiecke ABC mit den Eckpunkten $A(1,0,-1)$, $B(2,2,1)$, $C(4,-2,5)$ und DEF mit den Eckpunkten $D(4,4,11)$, $E(5,6,13)$ und $F(7,2,17)$.
   a) Zeigen Sie, dass die Dreiecke durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen!
   b) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Ebenen, in denen die Dreiecke liegen, in parameterfreier Form!
   c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke!
   d) Die beiden Dreiecke seien Grund- und Deckfläche eines Prismas. Bestimmen Sie dessen Seitenlängen, Höhe und Volumen!

5. a) Zeigen Sie, dass die Geraden $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ zueinander windschief sind!
   b) Ermitteln Sie die Richtung ihres gemeinsamen Lotes!
   c) Geben Sie die Gleichung der Ebene an, die die Gerade g_1 und das gemeinsame Lot enthält!
   d) Wo schneidet diese Ebene die Gerade g_2 ?
   e) Wo beginnt das Lot auf der Geraden g_1 ?
   f) Welchen Abstand haben die windschiefen Geraden voneinander?
   g) Ermitteln Sie zwei zueinander parallele Ebenen, von denen die eine die Gerade g_1 und die andere die Gerade g_2 enthält! Welchen Abstand haben diese Ebenen voneinander?

Aufgabenkomplex 5: Inverse Matrix, Determinanten, Analytische Geometrie

Letzter Abgabetermin: 23. Januar 2012

---

1. Seien a und b beliebige reelle Parameter. Berechnen Sie $\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 & -1 \end{vmatrix}$!

Für welche Parameterwerte verschwindet die Determinante?

Lösung:

Zweckmäßig Entwicklung nach 2. Spalte:

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & b & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(-2+2-1+1) + b(a+6+2-1-3-4a) = \underline{\underline{b\,(4-3a)}}$$

$b\,(4-3a) = 0$ gilt, wenn $b = 0$ oder $a = \dfrac{4}{3}$ ist.

---

2. Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(\boldsymbol{A})$ und $\boldsymbol{A}^{-1}$ in Abhängigkeit vom Parameter a !

b) Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x \quad + z &= 2 \\ 2x+y+3z &= 7 \\ 3x+y+5z &= 12 \end{aligned} \quad !$$

Lösung:

a) $\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = a+2-3-3 = a-4$

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 1 & a-3 & -3 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & a-4 & -1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{-1}{a-4} & \frac{-1}{a-4} & \frac{1}{a-4} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{a-3}{a-4} & \frac{1}{a-4} & \frac{-1}{a-4} \\
0 & 1 & 0 & \frac{-2a+9}{a-4} & \frac{a-3}{a-4} & \frac{-1}{a-4} \\
0 & 0 & 1 & \frac{-1}{a-4} & \frac{-1}{a-4} & \frac{1}{a-4}
\end{array}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{a-4}\begin{pmatrix} a-3 & 1 & -1 \\ 9-2a & a-3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Im Falle $a = 4$ ist die Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht invertierbar.

b) Mit $a=5$ ergibt sich aus dem Ergebnis von a)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

also ist $x=-1$, $y=0$ und $z=3$.

---

3. Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$!

Lösung:

Inversion von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

oder:

Die gesuchte Matrix $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$ kann durch Lösung des Gleichungssystems $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{\mathsf{T}}$ ermittelt werden:

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 7 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ \hline \end{array}$$

---

4. Betrachtet werden die Dreiecke ABC mit den Eckpunkten $A(1,0,-1)$, $B(2,2,1)$, $C(4,-2,5)$ und DEF mit den Eckpunkten $D(4,4,11)$, $E(5,6,13)$ und $F(7,2,17)$.

a) Zeigen Sie, dass die Dreiecke durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen!

b) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Ebenen, in denen die Dreiecke liegen, in parameterfreier Form!

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Dreiecke!

d) Die beiden Dreiecke seien Grund- und Deckfläche eines Prismas. Bestimmen Sie dessen Seitenlängen, Höhe und Volumen!

Lösung:

a) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CF}=\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}$.

Also geht das Dreieck DEF aus dem Dreieck ABC durch Parallelverschiebung hervor, so dass die Dreiecke kongruent sind und parallel zueinander liegen.

oder $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EF}=\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix},\ \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{FD}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-6\end{pmatrix}$.

Da die Dreiecksseiten durch parallele Vektoren beschrieben werden, sind die Dreiecke kongruent und liegen parallel zueinander.

b) $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&2\\3&-2&6\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}16\\0\\-8\end{pmatrix}\hat{=}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

ABC liegt in der Ebene $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)=0$, d.h. $2x-z=3$.

DEF liegt in der Ebene $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\4\\11\end{pmatrix}\right)=0$, d.h. $2x-z=-3$.

c) Fläche $=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}16\\0\\-8\end{pmatrix}\right\|=4\left\|\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right\|=4\sqrt{5}$

d) Die Seitenlängen der Grund- und der Deckfläche sind $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{DE}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right\|=3$, $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{EF}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}2\\-4\\4\end{pmatrix}\right\|=6$ und $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|=\left\|\overrightarrow{FD}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-3\\2\\-6\end{pmatrix}\right\|=7$, die der Verbindungsstrecken ist $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\left\|\overrightarrow{BE}\right\|=\left\|\overrightarrow{CF}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}\right\|=13$.

Die Höhe des Prismas ist die Länge der Projektion des Seitenvektors $\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}$ auf $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$,

also $\left\|\dfrac{\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right\|=\left|-\frac{6}{5}\right|\sqrt{5}=\frac{6}{5}\sqrt{5}=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

Man kann die Höhe auch durch Fällen des Lotes von einem Punkt der Deckfläche, z.B. von $D(4,4,11)$ auf die Ebene $x-2z=3$, in der die Grundfläche liegt, bestimmen. Die Geradengleichung dieses Lotes lautet $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, Einsetzen in die Ebenengleichung ergibt für den Lotfußpunkt $2(4+2t)-(11-t)=3$, d.h. $5t=6$, $t=\frac{6}{5}$, so dass $\left\| \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{6}{5}\sqrt{5} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ die Länge des Lotes und damit die Höhe ist.

Das Volumen des Prismas ergibt sich dann aus Grundfläche $*$ Höhe zu $4\sqrt{5} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = 24$.

Man kann das Volumen des Prismas auch als das halbe Volumen des von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannten Spates berechnen:

$$V = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 12 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-24+24+36+12-72-24| = \frac{1}{2} |-48| = 24.$$

---

5. a) Zeigen Sie, dass die Geraden $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ zueinander windschief sind!

b) Ermitteln Sie die Richtung ihres gemeinsamen Lotes!

c) Geben Sie die Gleichung der Ebene an, die die Gerade g_1 und das gemeinsame Lot enthält!

d) Wo schneidet diese Ebene die Gerade g_2 ?

e) Wo beginnt das Lot auf der Geraden g_1 ?

f) Welchen Abstand haben die windschiefen Geraden voneinander?

g) Ermitteln Sie zwei zueinander parallele Ebenen, von denen die eine die Gerade g_1 und die andere die Gerade g_2 enthält! Welchen Abstand haben diese Ebenen voneinander?

Lösung:

a) windschief: weder parallel noch Schnitt

Die Geraden sind offensichtlich nicht parallel. Wir suchen den evtl. Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1+2s &= -5+t & & \\ 2+\ \ s &= 13 & \Longrightarrow\quad & s = 11 \\ 2s &= 16+4t & \Longrightarrow\quad & 22 = 16+4t,\ \ t = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Für diese Parameterwerte ergibt sich als x–Komponenete $1+2\cdot 11 = 23 \neq -5+\frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$. Das ist ein Widerspruch, also liegt kein Schnittpunkt vor.

oder:

Volumen des Spates aus $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$ ist $\left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 11 \\ 2 & 4 & 16 \end{vmatrix} \right| =$ $|22-24-88-16| \neq 0$, also windschief.

b) Das gemeinsame Lot steht auf beiden Geraden senkrecht, seine Richtung ist also

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-0 \end{pmatrix} = 0, \quad 11x + 10y - 16z = 11 \cdot 1 + 10 \cdot 2 - 16 \cdot 0, \quad 11x + 10y - 16z = 31$$

d) Schnitt von $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $11x + 10y - 16z = 31$:

$11(-5+s)+10 \cdot 13 - 16(16+4s) = 31, \quad -55+130-256+11s-64s = 31, \quad -212 = 53s, \quad s = -4,$

d.h. Schnitt in $\begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) Zur Ebene $11x + 10y - 16z = 31$ gehören die Gerade g_1 und das gemeinsame Lot einschließlich des Lotfußpunktes auf g_2. Gesucht ist also der innerhalb dieser Ebene liegende Schnitt von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{llll} 1 + 2s = -9 + 4t & & & \\ 2 + \ \ s = 13 - 6t & & \Longrightarrow & 2+s = 13+12s, \quad -11s = 11, \quad s = -1, \quad t = 2 \\ \quad\ \ 2s = -t & \Longrightarrow \quad t = -2s & & \end{array}$$

Für die aus der 2. und 3. Zeile ermittelten Paramater s und t ist auch die 1. Zeile erfüllt: $1 + 2(-1) = -1 = -9+4 \cdot 2$, der Schnittpunkt des gemeinsamen Lotes mit der Gerade g_1 ist somit $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

f) Der Abstand ist die Länge des gemeinsamen Lotes, also $\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|$ $= 2\sqrt{53}$.

g) Der (gleiche) Stellungsvektor der Ebenen muss zu g_1 und g_2 orthogonal sein, ist also $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ebene, die g_1 enthält: $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-0 \end{pmatrix} = 0, \quad 4x - 6y - z = -8,$

Ebene, die g_2 enthält: $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+\ 5 \\ y-13 \\ z-16 \end{pmatrix} = 0, \quad 4x - 6y - z = -114.$

Der Abstand dieser Ebenen ist gleich dem Abstand von g_1 und g_2, also $2\sqrt{53}$.