Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

7. Dezember 2011

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 4: Lineare Gleichungssysteme

Letzter Abgabetermin: 5. Januar 2012
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 4“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

Alle Aufgaben sind ohne elektronische Hilfsmittel zu lösen!

1. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch:

   a) $\begin{array}{r} 6x+7y=15 \\ 7x+8y=17 \end{array}$, b) $\begin{array}{r} 6x+\ \ 7y=15 \\ 12x+14y=17 \end{array}$, c) $\begin{array}{r} 6x+\ \ 7y=15 \\ 12x+14y=30 \end{array}$!

2. Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{array}{rl} 3x-7y+2z &= -7 \\ x+\ y-\ z &= 6 \\ 8x-2y+\lambda z &= \mu \end{array}$.

   a) Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda=2$, $\mu=8$ mit dem Gaußschen Algorithmus!
   b) Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar? Geben Sie im Falle der mehrdeutigen Lösbarkeit auch die Lösung an! Welche geometrische Bedeutung haben die drei Fälle?

3. Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 10 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

   a) Welcher Bedingung müssen die Komponenten des Vektors $\vec{r}$ genügen, damit das Gleichungssystem lösbar ist?
   b) Lösen Sie das Gleichungssystem für die spezielle rechte Seite $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$!

4. In einer Cafeteria gibt es Speisen zu 3, 8 und 11 €. Wie viele der einzelnen Speisen müssen bestellt werden, damit 23 Personen jeweils genau eine Speise bekommen, wenn dafür insgesamt genau 200 € ausgegeben werden sollen?

5. Bestimmen Sie ein Polynom höchstens 3. Grades $P(x)$, für das $P(1)=2$, $P'(1)=-2$, $P(-1)=10$, $P'(-1)=-10$ gilt!

Aufgabenkomplex 4: Lineare Gleichungssysteme

Letzter Abgabetermin: 5. Januar 2012

---

1. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme und interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch:

a) $\begin{array}{l} 6x+7y=15 \\ 7x+8y=17 \end{array}$, b) $\begin{array}{r} 6x+\ \ 7y=15 \\ 12x+14y=17 \end{array}$, c) $\begin{array}{r} 6x+\ \ 7y=15 \\ 12x+14y=30 \end{array}$!

Lösung:

a)

$$\begin{array}{rl} 6x+\ 7y=\ \ 15 & |\cdot 7 \\ 7x+\ 8y=\ \ 17 & |\cdot 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 42x+49y=105 & |+ \\ 42x+48y=102 & |- \end{array}$$

$$y = 3$$

$$x = \frac{15-7y}{6} = -1$$

2 Geraden schneiden sich in einem Punkt (nämlich dem Punkt $(-1,3)$).

b)

$$\begin{array}{rl} 6x+\ 7y=15 & |\cdot 2 \\ 12x+14y=17 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 12x+14y=30 & |+ \\ 12x+14y=17 & |- \end{array}$$

$$0 = 13$$

Widerspruch

2 Geraden sind parallel.

c)

$$\begin{array}{rl} 6x+\ 7y=15 & |\cdot 2 \\ 12x+14y=30 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 12x+14y=30 & |+ \\ 12x+14y=30 & |- \end{array}$$

$$0 = 0$$

immer erfüllt

2 Geraden sind identisch, alle Punkte darauf sind Lösung.

$$y=t,\quad x=\frac{15-7y}{6}=\frac{5}{2}-\frac{7}{6}t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}-\frac{7}{6}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\frac{7}{6} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x-7y+2z&=-7\\ x+\ y-\ z&=\ 6\\ 8x-2y+\lambda z&=\ \mu \quad . \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda=2$, $\mu=8$ mit dem Gaußschen Algorithmus!

b) Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar? Geben Sie im Falle der mehrdeutigen Lösbarkeit auch die Lösung an! Welche geometrische Bedeutung haben die drei Fälle?

Lösung:

a) Zur Vereinfachung der Rechnung empfiehlt sich ein Tausch der ersten und zweiten Zeile.

Gaußscher Algorithmus:

$$\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 1 & -1 & 6\\ 3 & -7 & 2 & -7\\ 8 & -2 & 2 & 8\\ \hline 1 & 1 & -1 & 6\\ \mathbf{0} & -10 & 5 & -25\\ \mathbf{0} & -10 & 10 & -40\\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 6\\ 0 & -2 & 1 & -5\\ 0 & -1 & 1 & -4\\ \hline 1 & 1 & -1 & 6\\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 4\\ 0 & -2 & 1 & -5\\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 6\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & \mathbf{0} & -1 & 3\\ \hline 1 & 1 & -1 & 6\\ 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3\\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & \mathbf{0} & 3\\ 0 & 1 & \mathbf{0} & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ \hline 1 & \mathbf{0} & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}$$

Lösung: $x=2,\ y=1,\ z=-3$

b) Mit λ und μ ergibt sich

$$\begin{array}{rrc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 6\\ 3 & -7 & 2 & -7\\ 8 & -2 & \lambda & \mu\\ \hline 1 & 1 & -1 & 6\\ \mathbf{0} & -10 & 5 & -25\\ \mathbf{0} & -10 & \lambda+8 & \mu-48\\ \hline \end{array}$$

Offensichtlich hat die Koeffizientenmatrix für $\lambda\neq-3$ den Rang 3, so dass das Gleichungssystem in diesem Falle eindeutig lösbar ist. Geometrisch entspricht das dem Fall von drei sich in einem Punkt schneidenden Ebenen, die durch die drei gegebenen Gleichungen beschrieben werden.

Für $\lambda=-3$ hat die Koeffizientenmatrix hingegen den Rang 2, das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $\mu-48=-25$ ist.

Also ist das Gleichungssystem für $\lambda=-3$, $\mu\neq23$ unlösbar. Das entspricht geometrisch dem Fall, dass drei Ebenen keinen gemeinsamen Punkt haben (Die Schnittgerade der ersten beiden Ebenen ist echt parallel zur dritten Ebene.).

Für $\lambda=-3$, $\mu=23$ schneiden sich die drei Ebenen hingegen in einer Geraden, das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Fortsetzung des Gaußschen Algorithmus ergibt

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 6\\ 0 & -2 & \mathbf{1} & -5\\ \hline 1 & -1 & \mathbf{0} & 1\\ 0 & -2 & 1 & -5 \end{array} \qquad \begin{aligned} x&=\ \ 1+\ y\\ z&=-5+2y \end{aligned}$$

Somit lautet in diesem Falle die Lösung des Gleichungssytems $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -5 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Gegeben sei das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 10 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 10 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

a) Welcher Bedingung müssen die Komponenten des Vektors $\vec{r}$ genügen, damit das Gleichungssystem lösbar ist?

b) Lösen Sie das Gleichungssystem für die spezielle rechte Seite $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 11 \\ 16 \end{pmatrix}$!

Lösung:

a)
$$\begin{array}{rrrrr|c}
1 & 2 & -1 & 0 & 4 & a \\
1 & 4 & -5 & 1 & 3 & b \\
2 & -2 & 10 & 1 & -1 & c \\
5 & 6 & 3 & 2 & 10 & d \\
\hline
1 & 2 & -1 & 0 & 4 & a \\
0 & 2 & -4 & 1 & -1 & b-a \\
0 & -6 & 12 & 1 & -9 & c-2a \\
0 & -4 & 8 & 2 & -10 & d-5a \\
\hline
1 & 2 & -1 & 0 & 4 & a \\
0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{b-a}{2} \\
0 & 0 & 0 & 4 & -12 & c-2a+3(b-a) \\
0 & 0 & 0 & 4 & -12 & d-5a+2(b-a) \\
\hline
1 & 2 & -1 & 0 & 4 & a \\
0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{b-a}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & \frac{-5a+3b+c}{4} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d-2a-b-c \\
\hline
\end{array}$$

Das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn $d-2a-b-c=0$, d.h. $d=2a+b+c$ ist.

b) Die gegebene rechte Seite erfüllt die in a) hergeleitete Bedingung, das Einsetzen der konkreten Werte ergibt

$$\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 3 & 0 & 2 & 4 \\
0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1
\end{array}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. In einer Cafeteria gibt es Speisen zu 3, 8 und 11 €. Wie viele der einzelnen Speisen müssen bestellt werden, damit 23 Personen jeweils genau eine Speise bekommen, wenn dafür insgesamt genau 200 € ausgegeben werden sollen?

Lösung:

x: Anzahl Speisen zu 3 €, y: Anzahl Speisen zu 8 €, z: Anzahl Speisen zu 11 €

$$\begin{array}{ll} \text{Portionen} & x+y+z=23 \\ \text{Preis:} & 3x+8y+11z=200 \\ & x,\ y,\ z\ \text{ganz},\ \geq\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl}
\mathbf{1} & 1 & 1 & 23 & \\
3 & 8 & 11 & 200 & \mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I} \\ \hline
1 & 1 & 1 & 23 & \\
\mathbf{0} & 5 & 8 & 131 & \mathrm{II}:5 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 23 & \mathrm{I}-\mathrm{II} \\
0 & \mathbf{1} & \frac{8}{5} & \frac{131}{5} & \\ \hline
1 & \mathbf{0} & -\frac{3}{5} & -\frac{16}{5} & \qquad z=t,\quad x=-\frac{16}{5}t+\frac{3}{5}t \\
0 & 1 & \frac{8}{5} & \frac{131}{5} & \qquad y=\frac{131}{5}-\frac{8}{5}t
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -16 \\ 131 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll}
x=\dfrac{-16+3t}{5} & -16+3t\geq 0 & t\geq\dfrac{16}{3}\approx 5{,}333 \\
y=\dfrac{131-8t}{5} & 131-8t\geq 0 & t\leq\dfrac{131}{8}=16{,}375 \\
z=t & t\geq 0,\ \text{ganz} & \implies\ t=6,7,8,\ldots,15,16
\end{array}$$

Damit x und y auch ganzzahlig sind, müssen $-16+3t$ und $131-8t$ durch 5 teilbar sein.

t	$-16+3t$	$131-8t$	
6	2	83	
7	**5**	**75**	$x=1,\ y=15,\ z=7$
8	8	67	
9	11	59	
10	14	51	
11	17	43	
12	**20**	**35**	$x=4,\ y=7,\ z=12$
13	23	26	
14	26	19	
15	29	11	
16	32	3	

Somit kommen nur $t=7$ und $t=12$ in Frage. Es müssen 1 Speise zu 3 €, 15 Speisen zu 8 € und 7 Speisen zu 11 € oder 4 Speisen zu 3 €, 7 Speisen zu 8 € und 12 Speisen zu 11 € bestellt werden.

5. Bestimmen Sie ein Polynom höchstens 3. Grades $P(x)$, für das $P(1)=2$, $P'(1)=-2$, $P(-1)=10$, $P'(-1)=-10$ gilt!

Lösung:

$P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$, $P'(x)=b+2cx+3dx^2$,

$$\begin{array}{lcl} P(1) & = & a+b+c+d = 2 \\ P'(1) & = & b+2c+3d = -2 \\ P(-1) & = & a-b+c-d = 10 \\ P'(-1) & = & b-2c+3d = -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -10 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -10 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Somit ist $a=4$, $b=-3$, $c=2$, $d=-1$ und damit $P(x)=4-3x+2x^2-x^3$.