Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

15. November 2011

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 3: Vektoren und Matrizen

Letzter Abgabetermin: 8. Dezember 2011
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 3“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

Alle Aufgaben sind ohne elektronische Hilfsmittel zu lösen!

1. Bestimmen Sie eine Basis der Menge $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$. Was stellt die Menge geometrisch dar?

2. Berechnen Sie die Längen der Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und die Winkel zwischen diesen Vektoren! Was stellen Sie fest?

3. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ in seine Komponente in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die dazu orthogonale Komponente!

4. Für Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|$.
   a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Ungleichung und dem Wertebereich des Kosinus? Wann ist die Ungleichung mit dem Gleichheitszeichen erfüllt?
   b) Erläutern Sie die Ungleichung anhand der maximal möglichen Arbeit, die eine Kraft vom Betrag F in Abhängigkeit von ihrer Wirkungsrichtung in eine vorgegebene Richtung $\vec{s}$ verrichten kann!

5. In einer Firma werden aus Ausgangsstoffen A_1, A_2 und A_3 Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und aus den Ausgangs- und Zwischenprodukten Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Im Einzelnen werden für eine Einheit Z_1 5 Einheiten A_1, 2 Einheiten A_2 und 1 Einheit A_3, für eine Einheit Z_2 6 Einheiten A_1 und 2 Einheiten A_3 sowie für eine Einheit Z_3 4 Einheiten A_1 und je 2 Einheiten A_2 und A_3 benötigt, während für ein Stück E_1 5 Einheiten A_1, 2 Einheiten Z_1, 3 Einheiten Z_2 und 1 Einheit Z_3, für ein Stück E_2 3 Einheiten Z_1 und 2 Einheiten Z_2 und für ein Stück E_3 je eine Einheit Z_1, Z_2 und Z_3 benötigt werden.

   a) Geben Sie die Aufwandsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsstoffen und Zwischenprodukten, für den Zusammenhang von Zwischen- und Endprodukten sowie für den Zusammenhang von Ausgangsstoffen und Endprodukten an!
   b) Ein Kunde bestellt 10 Stück E_1, 20 Stück E_2 und 30 Stück E_3 sowie 20 Einheiten Z_1. Welche Mengen an Ausgangsstoffen werden benötigt?

b.w.

6. Berechnen Sie die Produkte

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 3 & 6 & 2 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -7 \\ -3 & 5 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

und

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 3 & 6 & 2 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -7 \\ -3 & 5 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

sofern diese existieren!

Aufgabenkomplex 3: Vektoren und Matrizen

Letzter Abgabetermin: 8. Dezember 2011

---

1. Bestimmen Sie eine Basis der Menge $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$. Was stellt die Menge geometrisch dar?

Lösung:

Wählt man $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$ bzw. $\beta = 1, \alpha = \gamma = 0$ oder $\gamma = 1, \alpha = \beta = 1$, so sieht man, dass die drei Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ zu der Menge gehören. Wir untersuchen zunächst, ob diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Sei hierzu $\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h.

$$\begin{aligned}
2\lambda_1 + 3\lambda_2 \qquad &= 0 \implies \lambda_2 = -\frac{2}{3}\lambda_1 \\
4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \implies 2\lambda_3 = -4\lambda_1 - 5\lambda_2 = -4\lambda_1 + \frac{10}{3}\lambda_1 = -\frac{2}{3}\lambda_1,\ \lambda_3 = -\frac{1}{3}\lambda_1 \\
3\lambda_1 - \lambda_2 + 11\lambda_3 &= 0 \qquad\quad 3\lambda_1 - \lambda_2 + 11\lambda_3 = 3\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_1 - \frac{11}{3}\lambda_1 = 0, \text{ erfüllt für alle } \lambda_1
\end{aligned}$$

Für (z.B.) $\lambda_1 = 3$ gilt $3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, die drei Vektoren sind nicht linear unabhängig.

Wegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ gilt

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = (\alpha + 3\gamma) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + (\beta - 2\gamma) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Jeder Vektor der gegebenen Menge ist also als Linearkombination der beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ darstellbar, diese beiden Vektoren sind offensichtlich linear unabhängig (Sonst müsste nämlich einer Vielfaches des anderen sein.). Somit ist (z.B.) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des Unterraumes und die Dimension des Unterraumes ist 2. (Es wäre genauso möglich, zwei andere der drei gegebenen Vektoren als Basisvektoren auszuwählen oder die Basis aus anderen Linearkombinationen der gegebenen Vektoren zu konstruieren.)

Mit $\lambda = \alpha + 3\gamma$ und $\mu = \beta - 2\gamma$ handelt es sich um die Menge aller Vektoren

$$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix},$$

also um eine Ebene, die den Koordinatenursprung enthält.

2. Berechnen Sie die Längen der Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und die Winkel zwischen diesen Vektoren! Was stellen Sie fest?

Lösung:

$$\|\vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13,$$

$$\left\|\vec{b}\right\| = \left\| \begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3}\cdot\sqrt{144+9+16} = 13\sqrt{3},$$

$$\begin{aligned}\|\vec{c}\| = \left\| \begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{9+72\sqrt{3}+144\cdot3+16+24\sqrt{3}+9\cdot3+144-96\sqrt{3}+16\cdot3} = \sqrt{169\cdot4} \\ &= 13\cdot2 = 26\end{aligned}$$

$$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos\frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\|} = \arccos 0 = 90^\circ \quad (\text{Skalarprodukt } 0 \iff \text{orthogonal}),$$

$$\sphericalangle(\vec{b},\vec{c}) = \arccos\frac{\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 12\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\|} = \arccos\frac{-169\sqrt{3}}{13\sqrt{3}\cdot26} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150^\circ,$$

$$\sphericalangle(\vec{c},\vec{a}) = \arccos\frac{\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} -3-12\sqrt{3} \\ 4+\ 3\sqrt{3} \\ -12+\ 4\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}\right\|} = \arccos\frac{-169}{26\cdot13} = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

Offensichtlich gilt $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Also bilden die drei gegebenen Vektoren ein Dreieck. Dieses ist rechtwinklig. Die berechneten Winkel sind seine Außenwinkel, ihre Summe ist 360°.

3. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ in seine Komponente in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und die dazu orthogonale Komponente!

Lösung:

Die Komponente von $\vec{v}$ in Richtung $\vec{a}$ ist $t\vec{a}$ mit noch zu bestimmendem Parameter t. Die dazu orthogonale Komponente sei mit $\vec{b}$ bezeichnet. Dann gilt $\vec{v} = t\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{b} \cdot \vec{a} = 0$. Skalare Multiplikation mit $\vec{a}$ ergibt $\vec{v} \cdot \vec{a} = (t\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = t\,\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} = t\,\vec{a} \cdot \vec{a}$ und folglich $t = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Konkret erhält man $t = \dfrac{\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \dfrac{28}{14} = 2$ und damit $t\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \vec{v} - t\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Die gesuchte Zerlegung lautet also $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

---

4. Für Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$.

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Ungleichung und dem Wertebereich des Kosinus? Wann ist die Ungleichung mit dem Gleichheitszeichen erfüllt?

b) Erläutern Sie die Ungleichung anhand der maximal möglichen Arbeit, die eine Kraft vom Betrag F in Abhängigkeit von ihrer Wirkungsrichtung in eine vorgegebene Richtung $\vec{s}$ verrichten kann!

Lösung:

a) Wegen $\varphi = \arccos \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$ ist $\cos\varphi = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$. Die Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist (für $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$) somit gleichbedeutend zu $|\cos\varphi| = \dfrac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|} \leq 1$, d.h. zu $-1 \leq \cos\varphi \leq 1$.

$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$ ist dabei äquivalent zu $|\cos\varphi| = 1$ und damit zu $\varphi = 0$ oder π. Das ist dann der Fall, wenn $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ist somit genau dann mit dem Gleichheitszeichen erfüllt, wenn die Vektoren Vielfache voneinander sind.

b) Für die Arbeit gilt $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\vec{F} \cdot \vec{s}| \leq \|\vec{F}\|\,\|\vec{s}\|$ besagt dann, dass für konstanten Betrag $F = \|\vec{F}\|$ die Arbeit betragsmäßig am größten wird, wenn sie in oder entgegengesetzt zur vorgegebenen Richtung $\vec{s}$ wirkt. Die maximal mögliche Arbeit wird dann verrichtet, wenn $\vec{F}$ und $\vec{s}$ gleich gerichtet sind, in diesem Falle gilt $W = \|\vec{F}\|\,\|\vec{s}\|$.

5. In einer Firma werden aus Ausgangsstoffen A_1, A_2 und A_3 Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und aus den Ausgangs- und Zwischenprodukten Endprodukte E_1, E_2 und E_3 gefertigt. Im Einzelnen werden für eine Einheit Z_1 5 Einheiten A_1, 2 Einheiten A_2 und 1 Einheit A_3, für eine Einheit Z_2 6 Einheiten A_1 und 2 Einheiten A_3 sowie für eine Einheit Z_3 4 Einheiten A_1 und je 2 Einheiten A_2 und A_3 benötigt, während für ein Stück E_1 5 Einheiten A_1, 2 Einheiten Z_1, 3 Einheiten Z_2 und 1 Einheit Z_3, für ein Stück E_2 3 Einheiten Z_1 und 2 Einheiten Z_2 und für ein Stück E_3 je eine Einheit Z_1, Z_2 und Z_3 benötigt werden.

a) Geben Sie die Aufwandsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsstoffen und Zwischenprodukten, für den Zusammenhang von Zwischen- und Endprodukten sowie für den Zusammenhang von Ausgangsstoffen und Endprodukten an!

b) Ein Kunde bestellt 10 Stück E_1, 20 Stück E_2 und 30 Stück E_3 sowie 20 Einheiten Z_1. Welche Mengen an Ausgangsstoffen werden benötigt?

Lösung:

a) Ausgangsstoffe — Zwischenprodukte

	je Z_1	je Z_2	je Z_3
A_1	5	6	4
A_2	2	0	2
A_3	1	2	2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Zwischenprodukte — Endprodukte

	je E_1	je E_2	je E_3
Z_1	2	3	1
Z_2	3	2	1
Z_3	1	0	1

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausgangsstoffe — Endprodukte

direkt:

	je E_1	je E_2	je E_3
A_1	5	0	0
A_2	0	0	0
A_3	0	0	0

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über Zwischenprodukte:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 27 & 15 \\ 6 & 6 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$

insgesamt also $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 37 & 27 & 15 \\ 6 & 6 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

b)
$$\boldsymbol{D}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} + \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 27 & 15 \\ 6 & 6 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1360 \\ 300 \\ 390 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1460 \\ 340 \\ 410 \end{pmatrix}$$

Es werden 1460 Einheiten A_1, 340 Einheiten A_2 und 410 Einheiten A_3 benötigt.

6. Berechnen Sie die Produkte

a) $$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 6 & 5 & 2 & 1\\7 & -1 & 3 & 6 & 2\\-8 & 4 & -2 & 1 & -7\\-3 & 5 & 6 & 0 & 4\\0 & -7 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

und

b) $$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 6 & 5 & 2 & 1\\7 & -1 & 3 & 6 & 2\\-8 & 4 & -2 & 1 & -7\\-3 & 5 & 6 & 0 & 4\\0 & -7 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & 1\end{pmatrix},$$

sofern diese existieren!

Lösung:

a) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}}_{(3)}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 6 & 5 & 2 & 1\\7 & -1 & 3 & 6 & 2\\-8 & 4 & -2 & 1 & -7\\-3 & 5 & 6 & 0 & 4\\0 & -7 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}0 & 7 & 11 & 11 & 3\end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & 1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 4\\2 & 4\\-1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}} =$$

$$(3)\quad \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 7 & 11 & 11 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\2 & 4\\2 & 4\\-1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}22 & 86\end{pmatrix}} =$$

$$\underbrace{(3)\quad\begin{pmatrix}22 & 86\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}66 & 258\end{pmatrix}} =$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}66 & 258\end{pmatrix}}}$$

b) Das Produkt existiert nicht, da die Typen der 2. Matrix (5×1) und der 3. Matrix (2×5) unverträglich sind.