Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

26. Oktober 2011

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 2: Umrechnung von Einheiten, Mengenlehre, Ungleichungen, Komplexe Zahlen

Letzter Abgabetermin: 17. November 2011
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 2“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

Elektronische Hilfsmittel dürfen nur bei Aufgabe 1 sowie zur zahlenmäßigen Berechnung des Winkels bei Aufgabe 7a) eingesetzt werden!

1. Rechnen Sie eine Energie von $0{,}64$ Kilokalorien in Pferdestärkenstunden und in Tonnenhektar pro Tagequadrat um!

2. Die Mengen $A = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R},\ y \geq x^2\}$, $B = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R},\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$ und $C = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R},\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ seien gegeben.
   a) Stellen Sie A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ grafisch dar!
   b) Stellen Sie $(A \cup B) \cap C$ und $(A \cap B) \cup C$ grafisch dar!

3. Für welche reellen x sind folgende Ungleichungen erfüllt:
   a) $|3x-2| + |3-2x| \geq 2$, b) $\dfrac{1}{3x-2} + \dfrac{1}{3-2x} \geq 2$?

4. Welche komplexen Zahlen z erfüllen die Bedingung $|z| = |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$?

5. a) Für welche reellen Zahlen t gilt $t \geq \dfrac{15}{t-2}$?
   b) Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, für die $|z| \geq \dfrac{15}{|z|-2}$ gilt!

6. Ermitteln Sie die komplexe Zahl z, die die Gleichung $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2} z + \dfrac{5+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = 8 + 2\mathrm{i}$ löst!

7. Geben Sie die Zahlen
   a) $\dfrac{(3+2\mathrm{i})(8-20\mathrm{i}) + 40 + 72\mathrm{i}}{(5-2\mathrm{i})^2 - (1-12\mathrm{i})}$, b) $\dfrac{(\mathrm{i}-\sqrt{3})^{400}}{128^{57}}$

   jeweils in algebraischer und in Polardarstellung an!

   Hinweis: Führen Sie die Rechnung zunächst in der für die jeweilige Aufgabe zweckmäßigeren Darstellung aus und rechnen Sie das Ergebnis in die andere Darstellung um!

Aufgabenkomplex 2: Umrechnung von Einheiten, Mengenlehre, Ungleichungen, Komplexe Zahlen

Letzter Abgabetermin: 17. November 2011

---

1. Rechnen Sie eine Energie von 0,64 Kilokalorien in Pferdestärkenstunden und in Tonnenhektar pro Tagequadrat um!

Lösung:

Für die Kalorie gibt es mehrere leicht unterschiedliche Definitionen, s. z.B. Wikipedia. Im Folgenden wird mit dem von der Internationalen Union für Ernährungswissenschaften (IUNS) beschlossenen Wert von 4,182 Nm gerechnet.

$$\begin{aligned}0{,}64\,\mathrm{kcal} &= 0{,}64\cdot 10^3\cdot 4{,}182\,\mathrm{Nm} = 640\cdot 4{,}182\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}\\ &= 640\cdot 4{,}182\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}\;\frac{1\,\mathrm{PS}}{75\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}80665\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\cdot 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}\;\frac{1\,\mathrm{h}}{3600\,\mathrm{s}} \approx 1{,}0108\cdot 10^{-3}\,\mathrm{PS\,h} \approx \underline{\underline{0{,}001\,\mathrm{PS\,h}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0{,}64\,\mathrm{kcal} &= 0{,}64\cdot 10^3\cdot 4{,}182\,\mathrm{Nm} = 640\cdot 4{,}182\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}} = 640\cdot 4{,}182\,\frac{\frac{\mathrm{t}}{1000}\left(\frac{100\,\mathrm{m}}{100}\right)^2}{\left(\frac{\mathrm{d}}{24\cdot 3600}\right)^2}\\ &= 640\cdot 4{,}182\,\frac{24^2\,3600^2}{1000\cdot 100^2}\,\frac{\mathrm{t\,ha}}{\mathrm{d^2}} \approx 1{,}9980\cdot 10^6\,\frac{\mathrm{t\,ha}}{\mathrm{d^2}} \approx \underline{\underline{2\cdot 10^6\,\frac{\mathrm{t\,ha}}{\mathrm{d^2}}}}\end{aligned}$$

---

2. Die Mengen $A=\{(x,y)|\ x,y\in\mathbb{R},\ y\ge x^2\}$, $B=\{(x,y)|\ x,y\in\mathbb{R},\ x^2+(y-1)^2\le 1\}$ und $C=\{(x,y)|\ x,y\in\mathbb{R},\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ seien gegeben.

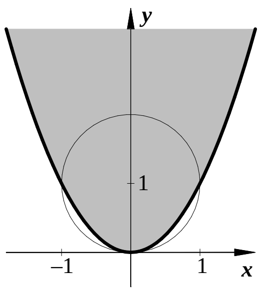
a) Stellen Sie A, B, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$ grafisch dar!

b) Stellen Sie $(A\cup B)\cap C$ und $(A\cap B)\cup C$ grafisch dar!

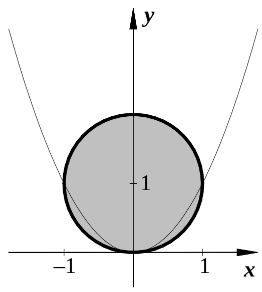
Lösung:

A: alle Punkte oberhalb und auf der Normalparabel $y=x^2$,
B: alle Punkte innerhalb und auf dem Kreis mit Radius 1 um den Punkt $(0,1)$,
C: alle Punkte im I. Quadranten einschließlich der nichtnegativen Halbachsen

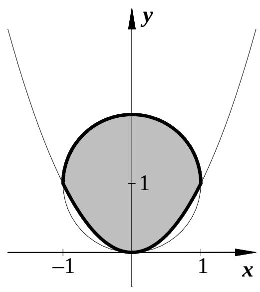
a)



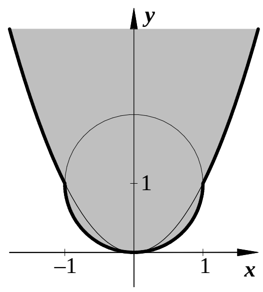
A



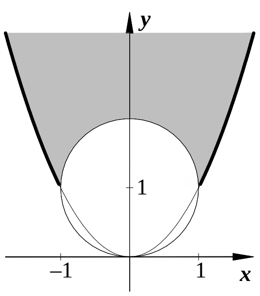
B



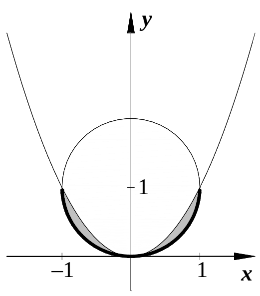
$A\cap B$



$A\cup B$

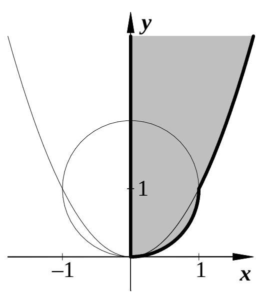


$A\backslash B$

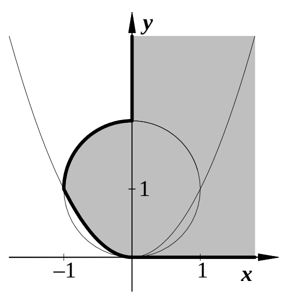


$B\backslash A$

b)



$(A\cup B)\cap C$



$(A\cap B)\cup C$

3. Für welche reellen x sind folgende Ungleichungen erfüllt:

a) $|3x-2|+|3-2x| \geq 2,$ b) $\dfrac{1}{3x-2}+\dfrac{1}{3-2x} \geq 2$?

Lösung:

a) $|3x-2| = \begin{cases} 3x-2, & x \geq 2/3 \\ 2-3x, & x < 2/3 \end{cases}$, $|3-2x| = \begin{cases} 3-2x, & x \leq 3/2 \\ 2x-3, & x > 3/2 \end{cases}$

Also sind 3 Fälle zu unterscheiden: <u>Beitrag zur Lösung</u>

$$\begin{array}{llllll} x < \frac{2}{3}: & 2-3x+3-2x \geq 2, & 3 \geq 5x, & \frac{3}{5} \geq x\,, & x \leq \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}: & 3x-2+3-2x \geq 2, & x \geq 1\,, & x \geq 1\,, & 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} < x \quad : & 3x-2+2x-3 \geq 2, & 5x \geq 7\,, & x \geq \frac{7}{5}, & \frac{3}{2} < x \end{array}$$

Zusammenfassung der Beiträge der 3 Fälle zur Lösung: $\underline{\underline{x \leq \frac{3}{5} \text{ und } x \geq 1}}$

b) $\dfrac{1}{3x-2}+\dfrac{1}{3-2x} = \dfrac{3-2x+3x-2}{(3x-2)(2-3x)} = \dfrac{x+1}{-6x^2+13x-6} \geq 2$

Für $x = \frac{2}{3}$ und $x = \frac{3}{2}$ ist die linke Seite nicht definiert. Ansonsten ist bei der Multiplikation der Ungleichung mit dem Nenner dessen Vorzeichen zu beachten. Er ist positiv, wenn beide Faktoren positiv sind (d.h. für $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$) oder wenn beide Faktoren negativ sind (nicht möglich, da dann gleichzeitig $x < \frac{2}{3}$ und $x > \frac{3}{2}$ sein müsste). Er ist negativ, wenn die Faktoren unterschiedliches Vorzeichen haben, also für $x < \frac{2}{3}$ und für $x > \frac{3}{2}$.

Fall A: $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$: $x+1 \geq -12x^2+26x-12, \quad x^2 - \frac{25}{12}x + \frac{13}{12} \geq 0$

Fall B: $x < \frac{2}{3}$ oder $x > \frac{3}{2}$: $x+1 \leq -12x^2+26x-12, \quad x^2 - \frac{25}{12}x + \frac{13}{12} \leq 0$

Die Parabel $x^2 - \frac{25}{12}x + \frac{13}{12}$ hat die Nullstellen $\frac{25}{24} \pm \sqrt{\frac{625}{576} - \frac{624}{576}} = 1; \frac{26}{24}$ und ist nach oben offen, also gilt $x^2 - \frac{25}{12}x + \frac{13}{12} \leq 0$ genau dann, wenn $1 \leq x \leq \frac{13}{12}$ ist. Da dieses Intervall komplett im Intervall $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$ liegt, ist die Ungleichung im Fall A für $\frac{2}{3} < x \leq 1$ und für $\frac{13}{12} \leq x < \frac{3}{2}$ erfüllt, während sie im Fall B für kein x erfüllt ist.

Lösung also: $\underline{\underline{\frac{2}{3} < x \leq 1 \text{ und } \frac{13}{12} \leq x < \frac{3}{2}}}$

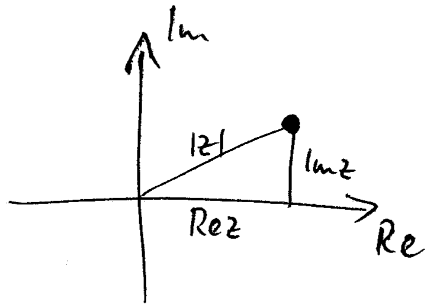
4. Welche komplexen Zahlen z erfüllen die Bedingung $|z| = |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$?

Lösung:

Sei $z = x + y\mathrm{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|z| = |x| + |y| \iff |z|^2 = (|x| + |y|)^2 \iff x^2 + y^2 = x^2 + 2|x|\,|y| + y^2 \iff |x|\,|y| = 0$$
$$\iff x = 0 \vee y = 0$$

Die Gleichung ist also genau dann erfüllt, wenn z auf der reellen Achse ($y = 0$) oder auf der imaginären Achse ($x = 0$) liegt.



Man kann auch geometrisch damit argumentieren, dass die Dreiecksungleichung $c \le a + b$ für die Seitenlängen a, b und c eines Dreiecks nur dann mit dem Gleichheitszeichen erfüllt sein kann, wenn die drei Punkte des Dreiecks auf einer Geraden liegen. Somit kann die gegebene Gleichung nur richtig sein, wenn z auf einer der Koordinatenachsen liegt. Ist Letzteres der Fall, so ist die Gleichung aber offensichtlich auch erfüllt.

---

5. a) Für welche reellen Zahlen t gilt $t \ge \dfrac{15}{t-2}$?

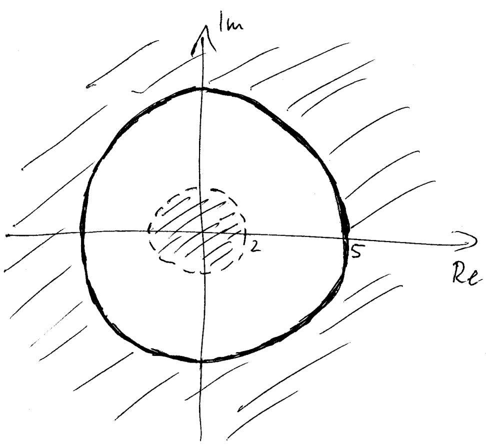
b) Skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen z, für die $|z| \ge \dfrac{15}{|z|-2}$ gilt!

Lösung:

a) $t^2 - 2t - 15 = 0$ für $t_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+15} = \begin{cases} -3 \\ 5 \end{cases}$, also $t^2 - 2t - 15 = (t+3)(t-5)$

$$\left.\begin{array}{ll} t < 2: & t(t-2) - 15 = t^2 - 2t - 15 = (t+3)(t-5) \le 0, \quad \text{d.h. für } -3 \le t < 2 \\ t = 2: & \text{nicht definiert} \\ t > 2: & t(t-2) - 15 = t^2 - 2t - 15 = (t+3)(t-5) \ge 0, \quad \text{d.h. für } t \ge 5 \end{array}\right\} \underline{\underline{[-3, 2) \cup [5, \infty)}}$$

b) Es gilt immer $|z| \ge 0$, so dass die Ungleichung nach a) für $0 \le |z| < 2$ und für $|z| \ge 5$ erfüllt ist:



6. Ermitteln Sie die komplexe Zahl z, die die Gleichung $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2}z+\dfrac{5+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=8+2\mathrm{i}$ löst!

Lösung:

$$\frac{2+3\mathrm{i}}{2}z=8+2\mathrm{i}-\frac{(5+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=8+2\mathrm{i}-\frac{7-3\mathrm{i}}{2}=\frac{16+4\mathrm{i}-7+3\mathrm{i}}{2}=\frac{9+7\mathrm{i}}{2},$$

$$(2+3\mathrm{i})z=9+7\mathrm{i},\quad z=\frac{(9+7\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}=\frac{39-13\mathrm{i}}{13}=3-\mathrm{i}$$

---

7. Geben Sie die Zahlen

a) $\dfrac{(3+2\mathrm{i})(8-20\mathrm{i})+40+72\mathrm{i}}{(5-2\mathrm{i})^2-(1-12\mathrm{i})}$, b) $\dfrac{(\mathrm{i}-\sqrt{3})^{400}}{128^{57}}$

jeweils in algebraischer und in Polardarstellung an!

Hinweis: Führen Sie die Rechnung zunächst in der für die jeweilige Aufgabe zweckmäßigeren Darstellung aus und rechnen Sie das Ergebnis in die andere Darstellung um!

Lösung:

a) $$\frac{(3+2\mathrm{i})(8-20\mathrm{i})+40+72\mathrm{i}}{(5-2\mathrm{i})^2-(1-12\mathrm{i})}=\frac{24-44\mathrm{i}+40+40+72\mathrm{i}}{25-20\mathrm{i}-4-1+12\mathrm{i}}=\frac{104+28\mathrm{i}}{20-8\mathrm{i}}=\frac{(26+7\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})}{(5-2\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})}$$

$$=\frac{116+87\mathrm{i}}{29}=\underline{\underline{4+3\mathrm{i}}},$$

$$r=\sqrt{4^2+3^2}=5,\ \varphi=\arctan\frac{3}{4}\approx 36{,}87^\circ \text{ (da I. Quadr.)},\ \underline{\underline{4+3\mathrm{i}\approx 5(\cos 36{,}87^\circ+\mathrm{i}\sin 36{,}87^\circ)}}$$

b) $$|\mathrm{i}-\sqrt{3}|=\sqrt{3+1}=2,\ \varphi=\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}})+\pi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6} \text{ (da II. Quadrant)},$$

$$\mathrm{i}-\sqrt{3}=2(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}),\quad \frac{(\mathrm{i}-\sqrt{3})^{400}}{128^{57}}=\frac{\left(2(\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6})\right)^{400}}{(2^7)^{57}}=$$

$$\frac{2^{400}(\cos\frac{2000\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{2000\pi}{6})}{2^{399}}=\underline{\underline{2(\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3})}}=2(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathrm{i})=\underline{\underline{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}}$$

$$\left(\text{da } \frac{2000\pi}{6}=\frac{1000\pi}{3}=332\pi+\frac{4\pi}{3}\right)$$