**Technische Universität Chemnitz**
Fakultät für Mathematik

12. Oktober 2011

**Höhere Mathematik I.1**

# Aufgabenkomplex 1: Grundlagen

**Letzter Abgabetermin: 27. Oktober 2011**
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
**Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 1“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!**

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

   a) $\dfrac{x-y}{y-x}$, b) $\sqrt{(-x)^{-6}}$, c) $\dfrac{x^5+2x^4+6x^3+9x^2+19x+35}{x^2+2x+5}$,

   d) $\dfrac{2-x}{4-x^2}+\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+4}{x+2}-\dfrac{2}{x^2+2x}$, e) $\dfrac{\left(x^2\right)^4-x^{\left(2^4\right)}}{x^8}+x^8$, f) $\dfrac{x^{6n+2}x^{3-n}}{\left(x^2\right)^n\left(x^{n+3}\right)^2}$ !

2. Ein 40 cm langer Draht vom Durchmesser 4 mm hat die Masse 36,7 g. Wieviel Meter Draht von gleichem Material, aber vom Durchmesser 6 mm haben die Masse 90 kg?

3. Lösen Sie unter Verwendung der Implikation $a=b \implies a^2=b^2$ die Gleichung $\sqrt{30-x}-\sqrt{x-4}=4$ !

4. Betrachtet wird eine Studentengruppe. Einige dieser Studenten haben einen Seminarschein bekommen, einige nicht. Alle Studenten, die einen Seminarschein bekommen haben, haben an mindestens 10 Seminaren teilgenommen und mindestens einen Vortrag gehalten. Welche der folgenden Schlussfolgerungen können aus dieser Aussage gezogen werden:
   a) Alle Studenten, die an mindestens 10 Seminaren teilgenommen haben und mindestens einen Vortrag gehalten haben, haben einen Seminarschein bekommen.
   b) Alle Studenten, die an weniger als 10 Seminaren teilgenommen haben oder keinen Vortrag gehalten haben, haben keinen Seminarschein bekommen.
   c) Alle Studenten, die an weniger als 10 Seminaren teilgenommen haben und keinen Vortrag gehalten haben, haben keinen Seminarschein bekommen.
   d) Es gibt einen Studenten, der an mindestens 10 Seminaren teilgenommen hat.
   e) Es gibt einen Studenten, der an weniger als 10 Seminaren teilgenommen hat.

5. Gegeben seien folgende Größen:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_n$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| $d_{n1}$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| $d_{n2}$ | −1 | −2 | −3 | −4 | −5 | −6 |
| $d_{n3}$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

   Berechnen Sie

   $$\sum_{n=0}^{5} c_n,\ \sum_{i=0}^{4}(c_i+1),\ \sum_{i=0}^{4} c_{i+1},\ \sum_{i=0}^{3} ic_i,\ \sum_{i=3}^{5} c_3,$$
   $$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} d_{ij},\ \sum_{k=0}^{5} d_{k2}d_{k3},\ \sum_{l=0}^{3} d_{l1}\left(\sum_{m=2}^{3} d_{lm}\right) \ !$$

6. Zur Umsatzanalyse in Abhängigkeit von der Tageszeit erfasst ein Handelsunternehmen mit $l$ Filialen $F_i$ $(i=1,\dots,l)$ seinen Tagesumsatz nach Artikeln $A_j$ $(j=1,\dots,m)$ und Verkaufsstunden $T_k$, letztere reichen jeweils von $k$.00 Uhr bis $k$.59 Uhr. Es sei $p_j$ der Verkaufspreis einer Einheit des Artikels $A_j$ und $a_{ijk}$ die Anzahl der in der Filiale $F_i$ in der Stunde $T_k$ verkauften Einheiten des Artikels $A_j$. Drücken Sie unter Verwendung des Summenzeichens aus:
   a) den Tagesumsatz der Filiale $F_i$,
   b) den Tagesumsatz des Gesamtunternehmens,

**b.w.**

c) den Anteil des ab 19.00 Uhr erzielten Umsatzes am Tagesumsatz des Gesamtunternehmens,
d) den Umsatz, den die Filialen $F_2$, $F_3$ und $F_4$ zusammen ab 19.00 Uhr erzielen,
e) den Umsatz, den das Gesamtunternehmen vor 10.00 Uhr an den Artikeln $A_4$, $A_5$, $A_6$ und $A_7$ erzielt!

## Aufgabenkomplex 1: Grundlagen

**Letzter Abgabetermin: 27. Oktober 2011**

---

**1.** Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\dfrac{x-y}{y-x}$, b) $\sqrt{(-x)^{-6}}$, c) $\dfrac{x^5+2x^4+6x^3+9x^2+19x+35}{x^2+2x+5}$,

d) $\dfrac{2-x}{4-x^2}+\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x+4}{x+2}-\dfrac{2}{x^2+2x}$, e) $\dfrac{\left(x^2\right)^4-x^{(2^4)}}{x^8}+x^8$, f) $\dfrac{x^{6n+2}x^{3-n}}{\left(x^2\right)^n\left(x^{n+3}\right)^2}$ !

**Lösung:**

a) $\dfrac{x-y}{y-x}=\dfrac{-(y-x)}{y-x}=-1$

b) $\sqrt{(-x)^{-6}}=\left(x^{-6}\right)^{\frac{1}{2}}=|x|^{-3}$

c) $(x^5+2x^4+6x^3+9x^2+19x+35):(x^2+2x+5)=x^3+x+7$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^5+2x^4+5x^3}\\
\qquad\quad x^3+9x^2+19x+35\\
\qquad\quad \underline{x^3+2x^2+\ \ 5x}\\
\qquad\qquad\quad 7x^2+14x+35\\
\qquad\qquad\quad \underline{7x^2+14x+35}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

d) $$\frac{2-x}{4-x^2}+\frac{x+1}{x}-\frac{x+4}{x+2}-\frac{2}{x^2+2x}=\frac{\cancel{2-x}\ 1}{\cancel{(2-x)}(2+x)}+\frac{x+1}{x}-\frac{x+4}{x+2}-\frac{2}{x^2+2x}$$
$$=\frac{x+(x+1)(x+2)-x(x+4)-2}{x(x+2)}=\frac{x+x^2+3x+2-x^2-4x-2}{x(x+2)}=0$$

e) $\dfrac{\left(x^2\right)^4-x^{(2^4)}}{x^8}+x^8=\dfrac{x^8-x^{16}}{x^8}+x^8=1-x^8+x^8=1$

f) $\dfrac{x^{6n+2}x^{3-n}}{\left(x^2\right)^n\left(x^{n+3}\right)^2}=\dfrac{x^{6n+2+3-n}}{x^{2n+2(n+3)}}=\dfrac{x^{5n+5}}{x^{4n+6}}=x^{5n+5-4n-6}=x^{n-1}$

---

**2.** Ein 40 cm langer Draht vom Durchmesser 4 mm hat die Masse 36,7 g. Wieviel Meter Draht von gleichem Material, aber vom Durchmesser 6 mm haben die Masse 90 kg?

**Lösung:**

$m=\rho V,\ \ \rho=\text{const.},\ $ d.h. $V\sim m$

$$\begin{aligned}40\,\text{cm}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(4\,\text{mm})^2 &\mathrel{\hat{=}} 36{,}7\,\text{g}\\ x\ \cdot\frac{\pi}{4}\cdot(6\,\text{mm})^2 &\mathrel{\hat{=}} 90\,\text{kg}\end{aligned}\qquad \begin{aligned}40\,\text{cm}\cdot 16 &\mathrel{\hat{=}} 36{,}7\,\text{g}\\ x\ \cdot 36 &\mathrel{\hat{=}} 90\,\text{kg}\end{aligned}\qquad 36x=\frac{40\,\text{cm}\cdot 16\cdot 90\,\text{kg}}{36{,}7\,\text{g}}$$

$$x=\frac{40\,\text{cm}\cdot 16\cdot 90000\,\text{g}}{36\cdot 36{,}7\,\text{g}}\approx 43597\,\text{cm}=\underline{\underline{435{,}97\,\text{m}}}$$

**3.** Lösen Sie unter Verwendung der Implikation $a = b \implies a^2 = b^2$ die Gleichung $\sqrt{30-x} - \sqrt{x-4} = 4$ !

**Lösung:**

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{30-x} - \sqrt{x-4} = 4 \\ \Longrightarrow & 30-x-2\sqrt{30-x}\,\sqrt{x-4} + x - 4 = 16 \\ \Longleftrightarrow & 10 = 2\sqrt{30-x}\,\sqrt{x-4} \\ \Longleftrightarrow & \;\;5 = \sqrt{30-x}\,\sqrt{x-4} \\ \Longrightarrow & 25 = (30-x)(x-4) = 34x - x^2 - 120 + x = -x^2 + 34x - 120 \\ \Longleftrightarrow & x^2 - 34x + 145 = 0 \\ \Longleftrightarrow & x_{1/2} = 17 \pm \sqrt{289-145} = 17 \pm \sqrt{144} = \left\{ \begin{array}{c} 29 \\ 5 \end{array} \right. \end{array}$$

d.h. $\sqrt{30-x} - \sqrt{x-4} = 4 \implies x=29 \vee x=5$
$x=29 \vee x=5$ ist notwendig, aber nicht hinreichend für $\sqrt{30-x} - \sqrt{x-4} = 4$,
d.h. nur 29 und 5 kommen als Lösung in Frage.

Probe: $x = 29 \quad \sqrt{1} - \sqrt{25} = 4$ falsch
$x = 5 \quad \sqrt{25} - \sqrt{1} = 4$ stimmt

Lösung: $\underline{\underline{x = 5}}$

---

**4.** Betrachtet wird eine Studentengruppe. Einige dieser Studenten haben einen Seminarschein bekommen, einige nicht. Alle Studenten, die einen Seminarschein bekommen haben, haben an mindestens 10 Seminaren teilgenommen und mindestens einen Vortrag gehalten. Welche der folgenden Schlussfolgerungen können aus dieser Aussage gezogen werden:

a) Alle Studenten, die an mindestens 10 Seminaren teilgenommen haben und mindestens einen Vortrag gehalten haben, haben einen Seminarschein bekommen.
b) Alle Studenten, die an weniger als 10 Seminaren teilgenommen haben oder keinen Vortrag gehalten haben, haben keinen Seminarschein bekommen.
c) Alle Studenten, die an weniger als 10 Seminaren teilgenommen haben und keinen Vortrag gehalten haben, haben keinen Seminarschein bekommen.
d) Es gibt einen Studenten, der an mindestens 10 Seminaren teilgenommen hat.
e) Es gibt einen Studenten, der an weniger als 10 Seminaren teilgenommen hat.

**Lösung:**

$p$: Student hat einen Seminarschein bekommen.
$q$: Student hat an mindestens 10 Seminaren teilgenommen.
$r$: Student hat mindestens einen Vortrag gehalten.

a) Nein. Aus der gegebenen Aussage $p \Rightarrow (q \wedge r)$ folgt nicht $(q \wedge r) \Rightarrow p$.

b) Ja. $p \Rightarrow (q \wedge r)$ ist äquivalent zu $\neg(q \wedge r) \Rightarrow \neg p$, nach der de Morganschen Regel ist dies äquivalent zu der formulierten Aussage $(\neg q \vee \neg r) \Rightarrow \neg p$.

c) Ja. Die Voraussetzung $\neg q \wedge \neg r$ ist schärfer als die Voraussetzung $\neg q \vee \neg r$ von b), so dass die Aussage c) erst recht gilt.

d) Ja. Sonst gäbe es nämlich keinen Studenten, der einen Seminarschein bekommen hat, bekannt ist aber, dass einige Studenten einen Seminarschein bekommen haben.

e) Nein. Es ist nur bekannt, dass einige Studenten keinen Seminarschein bekommen haben, nicht, woran das liegt.

**5.** Gegeben seien folgende Größen:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_n$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| $d_{n1}$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| $d_{n2}$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ | $-6$ |
| $d_{n3}$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{5} c_n,\ \sum_{i=0}^{4}(c_i+1),\ \sum_{i=0}^{4} c_{i+1},\ \sum_{i=0}^{3} ic_i,\ \sum_{i=3}^{5} c_3,$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} d_{ij},\ \sum_{k=0}^{5} d_{k2}d_{k3},\ \sum_{l=0}^{3} d_{l1}\left(\sum_{m=2}^{3} d_{lm}\right)\ !$$

**Lösung:**

$$\sum_{n=0}^{5} c_n = 1+1+2+2+3+3 = 12,$$

$$\sum_{i=0}^{4}(c_i+1) = \sum_{i=0}^{4} c_i + \sum_{i=0}^{4} 1 = 9+5 = 14, \quad \sum_{i=0}^{4} c_{i+1} = \sum_{i=1}^{5} c_i = 11,$$

$$\sum_{i=0}^{3} ic_i = 0c_0 + 1c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 1+4+6 = 11, \quad \sum_{i=3}^{5} c_3 = c_3 + c_3 + c_3 = 6,$$

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{2} d_{ij} = \sum_{i=1}^{5}(d_{i1}+d_{i2}) = 10+10+10+10+10 = 50,$$

$$\sum_{k=0}^{5} d_{k2}d_{k3} = -1\cdot 1 - 2\cdot 0 - 3\cdot 1 - 4\cdot 0 - 5\cdot 1 - 6\cdot 0 = -1-3-5 = -9,$$

$$\sum_{l=0}^{3} d_{l1}\left(\sum_{m=2}^{3} d_{lm}\right) = \sum_{l=0}^{3} d_{l1}(d_{l2}+d_{l3}) = 11\cdot 0 + 12\cdot(-2) + 13\cdot(-2) + 14\cdot(-4) = -106$$

---

**6.** Zur Umsatzanalyse in Abhängigkeit von der Tageszeit erfasst ein Handelsunternehmen mit $l$ Filialen $F_i$ $(i = 1, \ldots, l)$ seinen Tagesumsatz nach Artikeln $A_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ und Verkaufsstunden $T_k$, letztere reichen jeweils von $k$.00 Uhr bis $k$.59 Uhr. Es sei $p_j$ der Verkaufspreis einer Einheit des Artikels $A_j$ und $a_{ijk}$ die Anzahl der in der Filiale $F_i$ in der Stunde $T_k$ verkauften Einheiten des Artikels $A_j$. Drücken Sie unter Verwendung des Summenzeichens aus:

a) den Tagesumsatz der Filiale $F_i$,

b) den Tagesumsatz des Gesamtunternehmens,

c) den Anteil des ab 19.00 Uhr erzielten Umsatzes am Tagesumsatz des Gesamtunternehmens,

d) den Umsatz, den die Filialen $F_2$, $F_3$ und $F_4$ zusammen ab 19.00 Uhr erzielen,

e) den Umsatz, den das Gesamtunternehmen vor 10.00 Uhr an den Artikeln $A_4$, $A_5$, $A_6$ und $A_7$ erzielt!

**Lösung:**

a) $\sum_{k=0}^{23}\sum_{j=1}^{m} a_{ijk}p_j$, b) $\sum_{i=1}^{l}\sum_{k=0}^{23}\sum_{j=1}^{m} a_{ijk}p_j$, c) $\dfrac{\sum_{k=19}^{23}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} a_{ijk}p_j}{\sum_{k=0}^{23}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} a_{ijk}p_j}$,

d) $\sum_{i=2}^{4}\sum_{k=19}^{23}\sum_{j=1}^{m} a_{ijk}p_j$, e) $\sum_{k=0}^{9}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=4}^{7} a_{ijk}p_j$

Die Reihenfolge der Summation ist dabei jeweils beliebig.