Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik 10. Juli 2013

Höhere Mathematik I.2

Übung 21: Differenziation von Funktionen mehrerer Veränderlicher

1. Ein Produkt wird in unterschiedlichen Qualitäten von 2 Herstellern produziert. Hersteller 1 muss für die Herstellung von einem Stück 4 €, Hersteller 2 muss 5 € aufwenden. Die von den Preisen p_1 für ein Stück des Herstellers 1 und p_2 für ein Stück des Herstellers 2 abhängige Nachfrage betrage $N_1(p_1,p_2)=40\,000-20\,000\,p_1+10\,000\,p_2$ Stück für das Produkt des Herstellers 1 und $N_2(p_1,p_2)=60\,000+10\,000\,p_1-10\,000\,p_2$ Stück für das Produkt des Herstellers 2. Berechnen Sie die Preise und die Nachfrage nach den Produkten der beiden Hersteller, die sich bei Marktgleichgewicht einstellen!

2. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie Gradient und Hessematrix folgender Funktionen:
   a) $f(x_1,x_2)=2x_1^2+x_1^4x_2^2$ an der Stelle $x_1=1,\ x_2=2$,
   b) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2\mathrm{e}^{x_2}+\arctan x_3$,
   c) $f(x,y)=\dfrac{1}{x}$!

3. Sei $g(t)=f(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))$. Welche Konsequenzen hätte es, wenn in der Kettenregel
$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=\nabla f(\vec{x})\cdot\dot{\vec{x}}(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$$
statt „∂“ einfach „d“ geschrieben und mit den partiellen Differenzialquotienten wie mit Brüchen gerechnet würde, wie das bei gewöhnlichen Differenzialquotienten zulässig ist?

4. Sei $z=3x^2+2xy$ mit $x=\sin t$ und $y=\cos t$. Berechnen Sie $\dot{z}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$
   a) mit der Kettenregel,
   b) durch Einsetzen!

5. Durch ein Gelände mit der Höhe $h(x,y)=\dfrac{1000+x+y+\sqrt{xy+76}}{10}$ werde längs der Gerade $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ eine Straße gebaut. Bestimmen Sie den Anstieg der Straße im Geländepunkt $(x,y)=(4,6)$!

6. Sei $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
   a) Zeichnen Sie das Niveaulinienbild!
   b) Um was für eine Fläche handelt es sich bei $z=f(x,y)$?
   c) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$!
   d) Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $f(x,y)$ im Punkt $(3,4)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$!
   e) Ermitteln Sie mithilfe der Richtungsableitung, wie sich $f(x,y)$ näherungsweise ändert, wenn x von 3 auf 3.01 und y von 4 auf 4.024 wächst? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der tatsächlichen Änderung!
   f) In welche Richtung wächst $f(x,y)$ am stärksten? Argumentieren Sie sowohl mit dem Gradienten als auch mit der geometrischen Bedeutung der Funktion!
   g) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkt $(3,4,5)$!