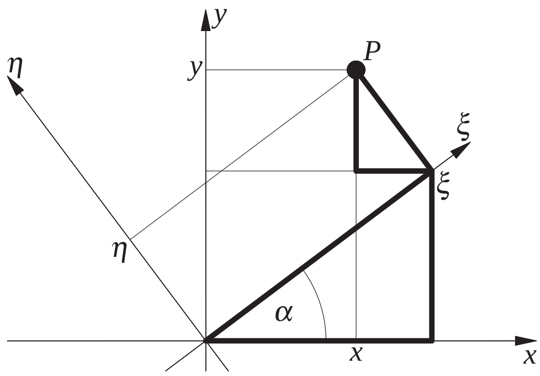
Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik 12. Juni 2013

Höhere Mathematik I.2

Übung 15: Diagonalisierung symmetrischer Matrizen

1. a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$!
   b) Bilden Sie aus den normierten Eigenvektoren eine Matrix $\boldsymbol{V}$, überzeugen Sie sich von ihrer Orthogonalität und führen Sie mit ihr die Diagonalisierung aus!

2. Aus dem kartesischen Koordinatensystem (x,y) der Ebene gehe durch Drehung um den Winkel α in positive Richtung das Koordinatensystem (ξ,η) hervor.
   a) Leiten Sie unter Verwendung der Beziehungen zwischen den Seiten der in der nebenstehenden Skizze hervorgehobenen Dreiecke her, wie sich die Koordinaten eines Punktes P im x-y-System aus seinen Koordinaten im ξ-η-System errechnen!
   b) Stellen Sie die Koordinatentransformation in der Form $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{V} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ dar und zeigen Sie, dass es sich bei $\boldsymbol{V}$ um eine orthogonale Matrix mit $\det \boldsymbol{V} = 1$ handelt!



3. Drehen Sie das kartesische x-y-Koordinatensystem unter Verwendung der Matrix $\boldsymbol{V}$ aus Aufgabe 1b) so, dass die Gleichung der Kurve $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 15x - 20y = 0$ in eine gut darstellbare Form („Hauptachsenlage“) überführt wird! Um was für eine Kurve handelt es sich? Stellen Sie die Kurve grafisch dar!

   Hinweis: $16x^2+24xy+9y^2+15x-20y = (x \quad y)\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (15 \quad -20)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

4. Bringen Sie die Kurven a) $2xy = 1$ und b) $13x^2 + 10xy + 13y^2 = 72$ in Hauptachsenlage! Um was für Kurven handelt es sich? Stellen Sie sie grafisch dar!