Technische Universität Chemnitz 27. Mai 2013
Fakultät für Mathematik

Höhere Mathematik I.2

Übung 11: Kurven im Raum

1. a) Stellen Sie den Kreis mit dem Radius r um den Punkt (x_0, y_0) in der Ebene als Funktion $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ dar!
   b) Berechnen Sie die Ableitung $\vec{x}\,'(t)$!
   c) Beschreiben Sie den oberen Halbkreis als Funktion $y = f(x)$!
   d) Berechnen Sie die Ableitung $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ zum einen mithilfe der Formel $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ aus $\vec{x}\,'(t)$, zum anderen als $f'(x)$ und überzeugen Sie sich davon, dass beide Ergebnisse gleich sind!
   e) Stellen Sie den Kreis mit Radius 2 um den Koordinatenursprung und den Tangentialvektor $\vec{x}\,'(t)$ in seinem Punkt $(\sqrt{3}, 1)$ grafisch dar! Notieren Sie mithilfe des Tangentialvektors die Gleichung der Tangente in diesem Punkt an den Kreis!
   f) Geben Sie die Gleichung der soeben ermittelte Gerade in parameterfreier Form an und überzeugen Sie sich davon, dass dies die Gleichung der Tangente an $y = f(x)$ an der Stelle $x_0 = \sqrt{3}$ ist!

2. a) Ermitteln Sie die Schnittkurven der Fläche $z^2 = x^2 + y^2$ mit den Koordinatenebenen sowie mit den zur x-y-Ebene parallelen Ebenen $z = a$ und skizzieren Sie die Fläche grob! Um was für eine Fläche handelt es sich?
   b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}$ eine konische Schraubenlinie beschreibt!
   c) Bestimmen Sie den Tangentialvektor an die konische Schraubenlinie!
   d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die konische Schraubenlinie im Koordinatenursprung!

3. Sei $\vec{x}(t)$ differenzierbar und $\|\vec{x}(t)\| = \text{const.}$ Zeigen Sie, dass dann $\vec{x}(t) \cdot \vec{x}\,'(t) = 0$ gilt! Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch!

4. Ein Punkt bewege sich gemäß $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ \sin(t/2) \end{pmatrix}$ von $t = 0$ bis π.
   a) Längs welcher Kurve erfolgt die Bewegung?
   b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit und ihren Betrag!
   c) Berechnen Sie die Beschleunigung und ihren Betrag!
   d) Wie groß ist die auf die zurückgelegte Strecke bezogene Geschwindigkeit, die auf einem Tachometer angezeigt würde?
   e) Wie groß ist die auf die zuletzt berechnete Geschwindigkeit bezogene Beschleunigung? Erläutern Sie den Zusammenhang zum Ergebnis von c)!