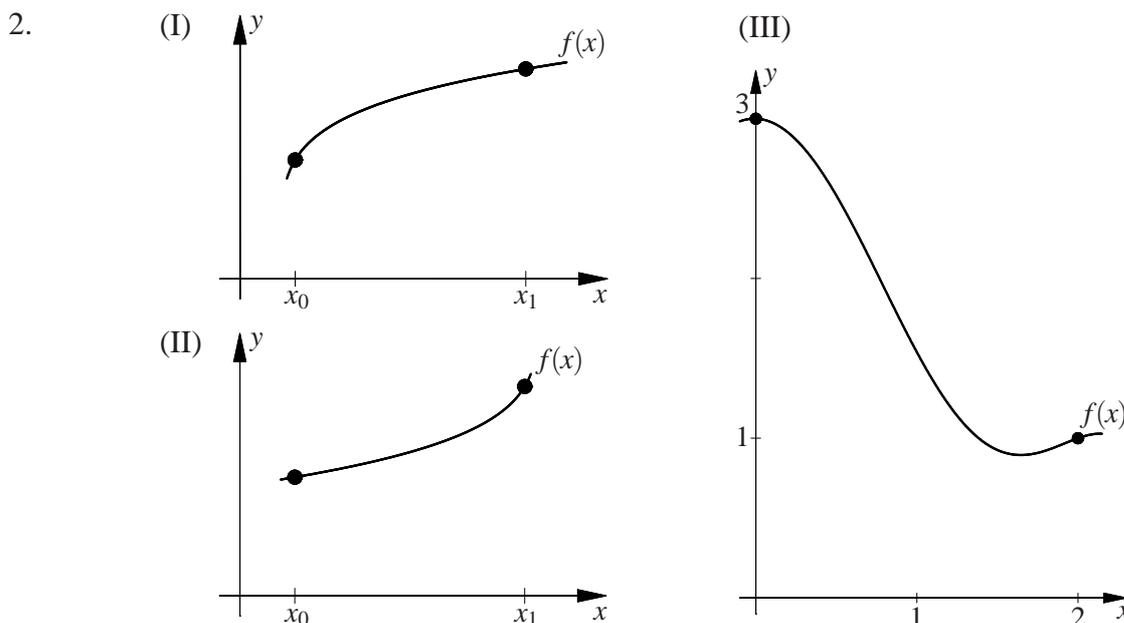


Höhere Mathematik I.2

Übung 8: Taylorentwicklung

1. a) Entwickeln Sie die Funktion  $f(\varphi) = \cos \varphi$  an der Stelle  $\varphi_0 = 0$  nach der Taylorschen Formel!  
 b) Schätzen Sie mit dem Lagrangeschen Restglied den Fehler bei der Berechnung einer Näherung für  $\cos 10^\circ$  nach der Formel  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$  ab!



- a) Ermitteln Sie für die Funktion aus Bild (III) den Anstieg der Sekante zwischen den beiden markierten Punkten des Funktionsgraphen! Wo nimmt für diese Funktion der Betrag der Ableitung zwischen den Stellen  $x_0 = 0$  und  $x_1 = 2$  den maximalen Wert an?
- b) Für stetig differenzierbare Funktionen erhält man als Spezialfall der Taylorschen Formel bei Abbruch der Taylorentwicklung schon nach dem absoluten Glied die Formel

$$f(x) = f(x_0) + R_1(x, x_0) \quad \text{mit} \quad R_1(x, x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

wobei  $\xi$  ein (unbekannter) Punkt zwischen  $x$  und  $x_0$  ist. Diese Formel kann auch in der Form  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$  notiert werden und wird als „Mittelwertsatz der Differentialrechnung“ bezeichnet. Erläutern Sie den damit beschriebenen Sachverhalt anschaulich!

- c) Bestimmen Sie in den Bildern (I) – (III) die Punkte  $\xi$  in den Restgliedern  $R_1(x_1, x_0)$  grafisch!
  - d) Für die Funktionen aus den Bildern (I) – (III) seien jeweils nur die Werte  $f(x_0)$  und  $\max_{x \in [x_0, x_1]} |f'(x)|$  bekannt. Ermitteln Sie auf grafischem Wege, in welchem Bereich dann der Funktionswert  $f(x_1)$  liegen kann!
3. Überzeugen Sie sich anhand der Taylorentwicklung von  $e^x$ ,  $\cos x$  und  $\sin x$  an der Stelle  $x_0 = 0$  davon, dass die Definition der Eulerschen Formel  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  sinnvoll ist!

b.w.

4. Ein Fahrzeug habe zum Zeitpunkt  $t = 5$  s nach seinem Start einen Weg von 20 m zurückgelegt, in diesem Moment betrage seine Geschwindigkeit 10 m/s und seine Beschleunigung  $2.5 \text{ m/s}^2$ .
- Angenommen, die Beschleunigung bleibt vom genannten Zeitpunkt an konstant. Geben Sie den Zusammenhang zwischen Zeit und zurückgelegtem Weg an! Welchen Weg hat das Fahrzeug zum Zeitpunkt  $t = 10$  s zurückgelegt?
  - Angenommen, die Beschleunigung vermindert sich vom genannten Zeitpunkt an pro Sekunde um  $0.5 \text{ m/s}^2$ . Geben Sie den Zusammenhang zwischen zurückgelegtem Weg und Zeit an! Welchen Weg hat das Fahrzeug zum Zeitpunkt  $t = 10$  s zurückgelegt?
  - Angenommen, die Beschleunigung ändert sich vom genannten Zeitpunkt an pro Sekunde höchstens um  $1 \text{ m/s}^2$ . Was kann man über den Weg sagen, den es zum Zeitpunkt  $t = 10$  s zurückgelegt hat?