

Höhere Mathematik I.2

Übung 7: Extremwertaufgaben, Taylorentwicklung

1. Ein Mann befindet sich in einem Ruderboot vor einer geradlinigen Küste. Der Abstand zum nächsten Küstenpunkt K beträgt 8 km. Der Mann möchte zum Küstenpunkt Z , der vom Punkt K genau 10 km entfernt liegt. Der Mann rudert mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h zu einem Küstenpunkt M zwischen K und Z und läuft anschließend mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h zum Punkt Z . Welchen Küstenpunkt muss der Mann ansteuern, um sein Ziel in kürzester Zeit zu erreichen?
2. Ein Unternehmen erzielt beim Absatz von x Mengeneinheiten einer Ware einen Gewinn von $G(x) = 100\sqrt{x} - 3x$. Danach wird eine Mengensteuer von $S(x) = rx$ erhoben. Bestimmen Sie denjenigen Steuersatz r , bei dem der Staat höchste Steuereinnahmen hat, wenn man nettogewinnorientiertes Verhalten des Unternehmers unterstellt!
3. a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x^3$ im Punkt $x_0 = 1$ nach der Taylorsche Formel!
b) Geben Sie die Taylorpolynome nullten bis dritten Grades und die zugehörigen Restglieder an! Skizzieren Sie die Funktion und die Taylorpolynome nullten bis dritten Grades!
4. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden 1000 Bakterien in eine Nährlösung gegeben. Die Zahl der Bakterien entwickelt sich nach der Formel $f(t) = \frac{G}{1 + Ae^{-0,2t}}$, wobei die Sättigungsgrenze bei 20000 Bakterien liegt.
 - a) Bestimmen Sie die Parameter G und A !
 - b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(t)$ monoton wachsend ist!
 - c) Zu welchem Zeitpunkt beträgt die Zahl der Bakterien 10000? Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt die Wachstumsgeschwindigkeit der Population?
 - d) Zu welchem Zeitpunkt wächst die Population am stärksten?